

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN VĂN HẬU

**NGHIÊN CỨU ỨNG XỬ TẤM COMPOSITE CHỨC NĂNG
(FGM) DƯỚI TÁC DỤNG TẢI CƠ NHIỆT
NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT**

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 5/2017

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN VĂN HẬU

**NGHIÊN CỨU ỨNG XỬ TẤM COMPOSITE CHỨC NĂNG
(FGM) DƯỚI TÁC DỤNG TẢI CƠ NHIỆT
NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT – 62520201**

Hướng dẫn khoa học

1. PGS. TS. NGUYỄN TRUNG KIÊN
2. TS. THÁI HỮU TÀI

Phản biện 1

Phản biện 2

Phản biện 3

MỞ ĐẦU

Khái niệm vật liệu phân lớp chức năng (*Functionally Graded Material (FGM)*) xuất hiện lần đầu tiên vào giữa thập niên 1980 tại Nhật Bản bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu, do tính ưu việt của nó thông qua sự làm việc của kết cấu dạng dầm, tấm hay vỏ khi chịu tải trọng cơ học, nhiệt độ, độ ẩm... hay trong các điều kiện làm việc bất lợi khác thì loại vật liệu này thường có những ưu điểm nổi bật. Ví dụ: hệ thống đẩy phản lực của động cơ tên lửa khi một mặt phải tiếp xúc với nhiệt độ rất cao trong khi mặt còn lại chỉ chịu tác động bởi các tải trọng thông thường, hay lớp vỏ tàu ngầm khi mặt ngoài phải chịu áp lực thủy tĩnh và môi trường bất lợi của nước biển trong khi mặt bên trong chỉ cần đáp ứng các yêu cầu cơ học cơ bản ... Vì vậy, việc đào sâu nghiên cứu đối tượng này là yêu cầu cấp thiết hiện nay. Có nhiều cách tiếp cận đối tượng nghiên cứu này.

- Có thể bằng các thí nghiệm vật liệu để xác định các đặc trưng vật liệu của chúng hay bằng các thí nghiệm kết cấu dạng tấm hay dầm để biết các nguyên lý ứng xử của kết cấu.
- Bằng các mô hình mô phỏng vật liệu hay kết cấu để rút ra được các nguyên tắc ứng xử chung.
- Bằng các mô hình tính toán lý thuyết thuần túy thông qua phân tích sự làm việc của các kết cấu cụ thể để từ đó có được cái nhìn tổng quát nhất...

Mỗi cách tiếp cận ở trên đều có những ưu điểm nhất định, cách tiếp cận đầu tiên thường mang lại hiệu quả cao nhưng đòi hỏi chi phí đầu tư lớn, nhất là trong điều kiện ở Việt Nam thì một số thí nghiệm sẽ không thực hiện được. Cách tiếp cận thứ hai khá trực quan, kết quả chính xác cao nhưng khối lượng tính toán rất lớn nên đòi hỏi phải có công cụ tính toán đủ mạnh mới đáp ứng các yêu cầu đặt ra. Cách tiếp cận thứ ba là đơn giản nhất nhưng vẫn đáp ứng được các mục tiêu đề ra và đây là cách tiếp cận phổ biến hiện nay được rất nhiều Nhà khoa học trên thế giới quan tâm. Luận án sẽ chọn cách tiếp cận thứ ba để phân tích cho đối tượng nghiên cứu thông qua bài toán tấm.

Trong luận án này sẽ tiến hành phân tích cụ thể cho nhiều loại tấm khác nhau: tấm FGM, tấm composite FGM và tấm composite hướng sợi nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau trên nền đàn hồi chịu tác dụng bởi tải trọng cơ học và nhiệt độ dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, bậc cao và tiếp cận 3 chiều, có xét đến bài toán tuyến tính và phi tuyến cho quan hệ giữa các thành phần chuyển vị và biến dạng, ứng dụng phương pháp làm giảm số ẩn số của trường chuyển vị, xác định chính xác vị trí mặt trung hoà vật lý cho tấm không đồng nhất, thiết lập phương trình năng lượng theo nguyên lý biến phân Hamilton, phương trình Lagrange, thiết lập các phương trình chủ đạo của bài toán, sử dụng phương pháp giải tích (lời giải Navier và Ritz) và phương pháp số (phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH)) để giải hệ phương trình chủ đạo. Trong đó, PP PTHH sử dụng biện pháp khử khoá cắt, kết hợp với các phương pháp làm trơn để tăng mức độ chính xác của lời giải, các ví dụ số để phân tích các bài toán tĩnh học, bài toán lực tới hạn và bài toán phân tích tần số dao động riêng của kết cấu tấm. Đồng thời, luận án cũng khảo sát ảnh hưởng của quy luật phân phối vật liệu, kích thước tấm, hiệu ứng nền, cấu trúc các phân lớp cũng như tiến hành phân tích hiệu ứng các phương pháp đồng nhất đến ứng xử của tấm phân lớp chức năng.

CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN

1.1 Đặt vấn đề

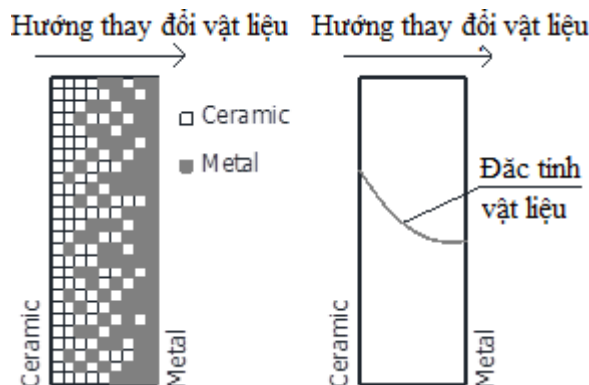
Hiện nay, trong lĩnh vực cơ học vật rắn người ta luôn tìm cách phát triển những loại vật liệu có nhiều tính năng ưu việt như: khả năng chịu lực cao, tính dẻo, mức độ chống chịu nhiệt độ... cũng như tính ứng dụng rộng rãi và mang lại nhiều hiệu quả kinh tế. Vật liệu phân lớp chức năng (FGM) đáp ứng hầu hết các yêu cầu trên. FGM là loại vật liệu composite đặc biệt có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục nhằm cải thiện và tối ưu khả năng chịu tải trọng cơ, nhiệt của kết cấu theo yêu cầu mong muốn. Để việc ứng dụng loại vật liệu này được rộng rãi, nhất là trong các lĩnh vực: xây dựng, cơ khí, năng lượng, hàng không, vũ trụ... cần thiết phải tiến hành phân tích và đào sâu nghiên cứu về ứng xử của vật liệu thông qua các mô hình lý thuyết thuần túy, các mô hình mô phỏng và các mô hình thí nghiệm thực tế.

1.2 Tổng quan

Vật liệu phân lớp chức năng (FGM) là một loại composite đặc biệt có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục nhằm cải thiện và tối ưu khả năng chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ của kết cấu. Điều này có được từ việc chế tạo loại vật liệu có sự thay đổi dần dần (quy luật gradient) của cấu trúc vật liệu nhằm tối ưu sự làm việc của từng loại vật liệu.

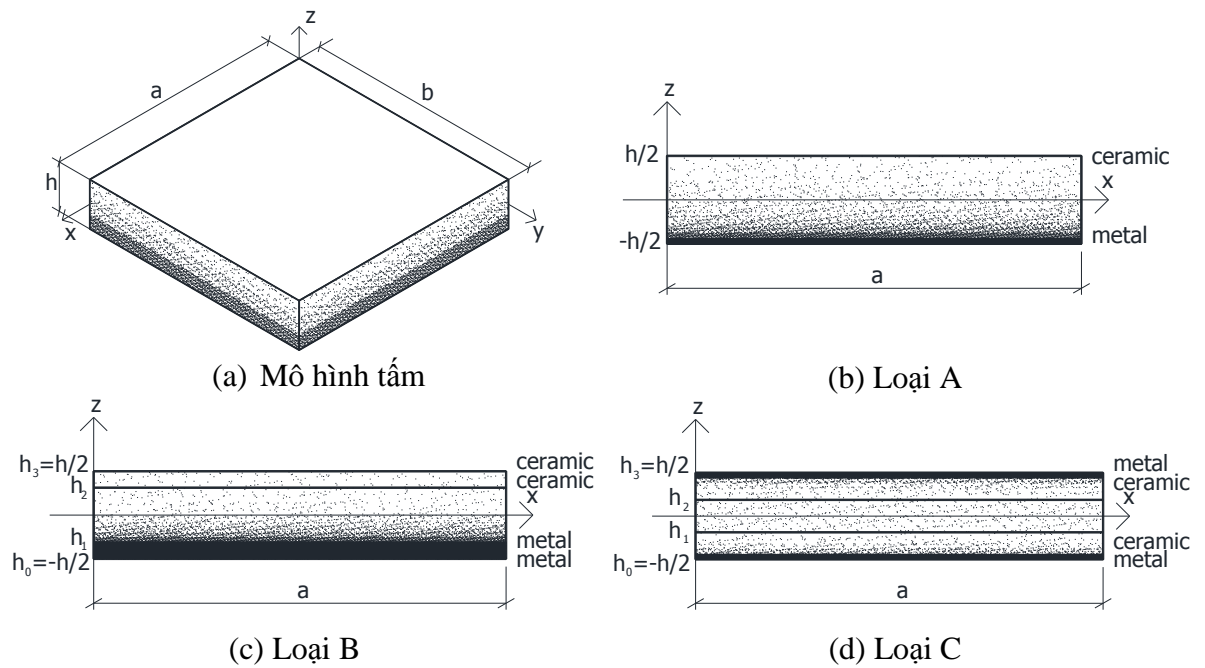
1.3 Đặc tính đàn hồi hữu hiệu của vật liệu FGM

FGM là loại vật liệu có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục theo yêu cầu mong muốn nhưng nếu xét trên bình diện cấu trúc vi mô thì các hạt vật liệu vẫn phân bố một cách không đồng nhất. Có hai cách tiếp cận đánh giá các đặc tính hữu hiệu của vật liệu FGM: mô hình rời rạc và mô hình liên tục (**Hình 1.1**).



Hình 1.1: Mô hình rời rạc và mô hình liên tục 1

1.4 Đối tượng nghiên cứu của luận án



Hình 1.2: Mô hình tấm FGM

1.5 Lý thuyết tính toán cho tấm (lớp đơn)

1.5.1 Lý thuyết tấm cổ điển

Trường chuyển vị của lý thuyết tấm cổ điển (CPT):

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.5.2 Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT):

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + (z - z_0) \theta_x(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + (z - z_0) \theta_y(x, y) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.5.3 Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT):

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.5.4 Lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận ba chiều

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận 3 chiều (Quasi-3D):

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) - \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} z + f(z) \theta_x(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) - \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} z + f(z) \theta_y(x, y) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y) + g(z) \theta_z(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.6 Phương pháp giải tích và phương pháp số phân tích ứng xử tấm FGM

1.6.1 Phương pháp giải tích

1.6.1.1 Lời giải Navier

Trường chuyển vị được xấp xỉ theo FSDT của lời giải Navier:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \\
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.6.1.2 Lời giải Levy

Trường chuyển vị được xấp xỉ theo FSDT của lời giải Levy:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(y) \cos \lambda x e^{i\omega t} \\
 v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(y) \sin \lambda x e^{i\omega t} \\
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(y) \sin \lambda x e^{i\omega t} \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(y) \cos \lambda x e^{i\omega t} \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(y) \sin \lambda x e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.6.1.3 Lời giải Ritz

Trường chuyển vị được xấp xỉ theo Quasi-3D của lời giải Ritz:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} X'(x) Y(y) e^{i\omega t} \\
v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} X(x) Y'(y) e^{i\omega t} \\
w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} X(x) Y(y) e^{i\omega t} \\
\theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} X'(x) Y(y) e^{i\omega t} \\
\theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} X(x) Y'(y) e^{i\omega t} \\
\theta_z(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} X(x) Y(y) e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.6.2 Phương pháp số

Do những giới hạn của phương pháp giải tích trong việc giải quyết các bài toán với hình học phức tạp, phương pháp số trở nên là một công cụ hữu hiệu đặc biệt khi công nghệ máy tính ngày càng phát triển. Có thể kể đến một số phương pháp số điển hình như: Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH), phương pháp không lưới, phương pháp đẳng hình học.

1.7 Mục tiêu nghiên cứu

Nghiên cứu ứng xử tấm composite chức năng (FGM) chịu tải trọng cơ nhiệt được cụ thể hoá một số vấn đề:

- Tổng hợp các mô hình và quy luật ứng xử của vật liệu FGM hiện nay.
- Xây dựng các quy luật phân bố vật liệu của kết cấu tấm composite FGM và tấm composite nhiều lớp.
- Phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất nhằm tăng mức độ chính xác của bài toán trong việc phân tích kết cấu tấm composite FGM.
- Xây dựng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, trong đó đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới phù hợp cho nhiều loại bài toán để phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM (kể cả lý thuyết Quasi-3D).
- Thiết lập phương trình cân bằng tuyến tính và phi tuyến thông qua nguyên lý biến phân Hamilton và nguyên lý Lagrange.
- Phát triển lời giải giải tích (Navier và Ritz) để phân tích ứng xử của tấm composite FGM.
- Phát triển PP PTHH bằng cách sử dụng phần tử khủ khoá cắt làm trơn trên miền, trên cạnh và trên nút để phân tích ứng xử tuyến tính và phi tuyến của tấm FGM.
- Xây dựng chương trình tính toán của các phương pháp giải bằng ngôn ngữ lập trình Matlab.
- Xác định nội lực, ứng suất, chuyển vị, lực tới hạn và tần số dao động của kết cấu tấm composite FGM và tấm composite nhiều lớp.
- Khảo sát nhiều dạng bài toán khác nhau nhằm tăng tính đa dạng và mức độ phong phú của luận án.
- Kiểm tra kết quả đạt được và so sánh với các kết quả của các nghiên cứu khác.

- Sự ảnh hưởng của các phương pháp đồng nhất hoá, kỹ thuật làm giảm số ẩn của phương trình đặc trưng, hệ số đặc trưng vật liệu, tỉ số hai cạnh, tỉ số cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc phân lớp, hệ số nền, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác nhau, các phương pháp làm tròn phần tử, lý thuyết biến dạng lớn... đều được khảo sát và phân tích một cách chi tiết.
- Đưa ra nhận xét, kết luận và hướng phát triển của luận án.

1.8 Nội dung nghiên cứu

- Kết hợp hệ số điều chỉnh cắt cải tiến đã phát triển với vị trí mặt trung hoà vật lý trên cơ sở lý thuyết FSDT để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm composite FGM thông qua việc thiết lập phương trình cân bằng, sử dụng lời giải Navier và PP PTHH để giải quyết bài toán. Trong phần này, cũng xét đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, xét ảnh hưởng của nền đàn hồi...
- Đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để phân tích cho tấm với các điều kiện biên khác nhau theo phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3, NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3 theo lý thuyết biến dạng Von-Karman để phân tích bài toán tĩnh với phi tuyến hình học của kết cấu tấm FGM và tấm composite nhiều lớp.
- Đánh giá hiệu ứng của các mô hình tính toán vật liệu đồng nhất hóa thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM.

1.9 Tính mới của luận án

Tính mới sẽ lần lượt xuất hiện trong từng chương của luận án:

- Kết hợp hệ số điều chỉnh cắt cải tiến đã phát triển với vị trí mặt trung hoà vật lý trên cơ sở lý thuyết FSDT để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM. Ngoài ra, luận án cũng đề cập đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, xét ảnh hưởng của nền đàn hồi thông qua lời giải Navier và PP PTHH.
- Đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để phân tích cho tấm với các điều kiện biên khác nhau theo phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3, NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM từ hàm biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3 và hàm biến dạng cắt bậc cao của luận án.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3 theo lý thuyết biến dạng Von-Karman để phân tích bài toán tĩnh của kết cấu tấm FGM và tấm composite nhiều lớp từ hàm biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3.

- Đánh giá hiệu ứng của các mô hình tính toán vật liệu cũng như các quy luật ứng xử hiện nay thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM.

1.10 Bố cục luận án

Luận án bao gồm 171 trang (không kể phần tài liệu tham khảo và phụ lục), 100 hình và 60 bảng biểu. Ngoài phần mở đầu, luận án bao gồm 7 chương:

- Chương 1 trình bày tổng quan lý thuyết liên quan đến vật liệu composite chức năng, các mô hình phân bố vật liệu, các lý thuyết tính toán và các phương pháp giải phương trình đặc trưng của bài toán.
- Chương 2 trình bày mô hình phân tích tấm chức năng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, chủ yếu tập trung khai thác hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến kết hợp với vị trí mặt trung hoà vật lý để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động cho kết cấu tấm FGM. Ngoài ra, luận án cũng xét đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, ảnh hưởng của nền đàn hồi thông qua lời giải Navier và PP PTHH.
- Chương 3 trình bày mô hình phân tích tấm chức năng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, phần này luận án phát triển một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D cho phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động của kết cấu tấm FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để giải quyết bài toán tấm với các điều kiện biên khác nhau của phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Chương 4 trình bày phân tích tấm FGM bằng phần tử MITC3 làm tròn sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, phần này đề cập đến phần tử khử khoá cắt của PP PTHH kết hợp với việc làm tròn trên miền (CS), trên cạnh (ES) và trên nút (NS) phần tử để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM.
- Chương 5 trình bày phân tích tấm FGM bằng phần tử CS-MITC3 và ES-MITC3 có xét thành phần biến dạng nhỏ chuyển vị lớn Von-Karman theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, phần này tập trung khai thác thành phần phi tuyến của trường biến dạng để phân tích bài toán tĩnh của kết cấu tấm nhằm mang đến kết quả tin cậy đúng với sự làm việc của kết cấu.
- Chương 6 trình bày hiệu ứng các phương pháp tính toán các đặc tính đàn hồi đồng nhất hoá đến ứng xử của tấm FGM, phần này chủ yếu đánh giá hiệu ứng các mô hình tính toán vật liệu hiện nay thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm FGM.
- Chương 7 trình bày kết luận, các kết quả đạt được, hướng phát triển tiếp theo cũng như các nội dung liên quan mà trong khuôn khổ luận án chưa đề cập đến.

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TẮM CHỨC NĂNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

2.1 Điểm mới của luận án

- Kết hợp mặt trung hoà vật lý với hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến để phân tích ứng xử tấm FGM trên nền đàn hồi.
- Phương pháp làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng.

2.2 Đặc trưng vật liệu của tấm FGM

Xét mô hình tấm FGM như **Hình 1.2**. Các đặc trưng vật liệu lần lượt được xác định:

- Tấm loại A: được chế tạo từ kim loại và gốm với hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) (**Hình 2.1b**):

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad (2.1)$$

trong đó p là hệ số đặc trưng vật liệu, h là chiều dày tấm.

- Tấm loại B: là tấm composite với lớp trên là gốm, lớp dưới được chế tạo từ kim loại, và lõi giữa được làm từ kim loại và gốm (**Hình 2.1c**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

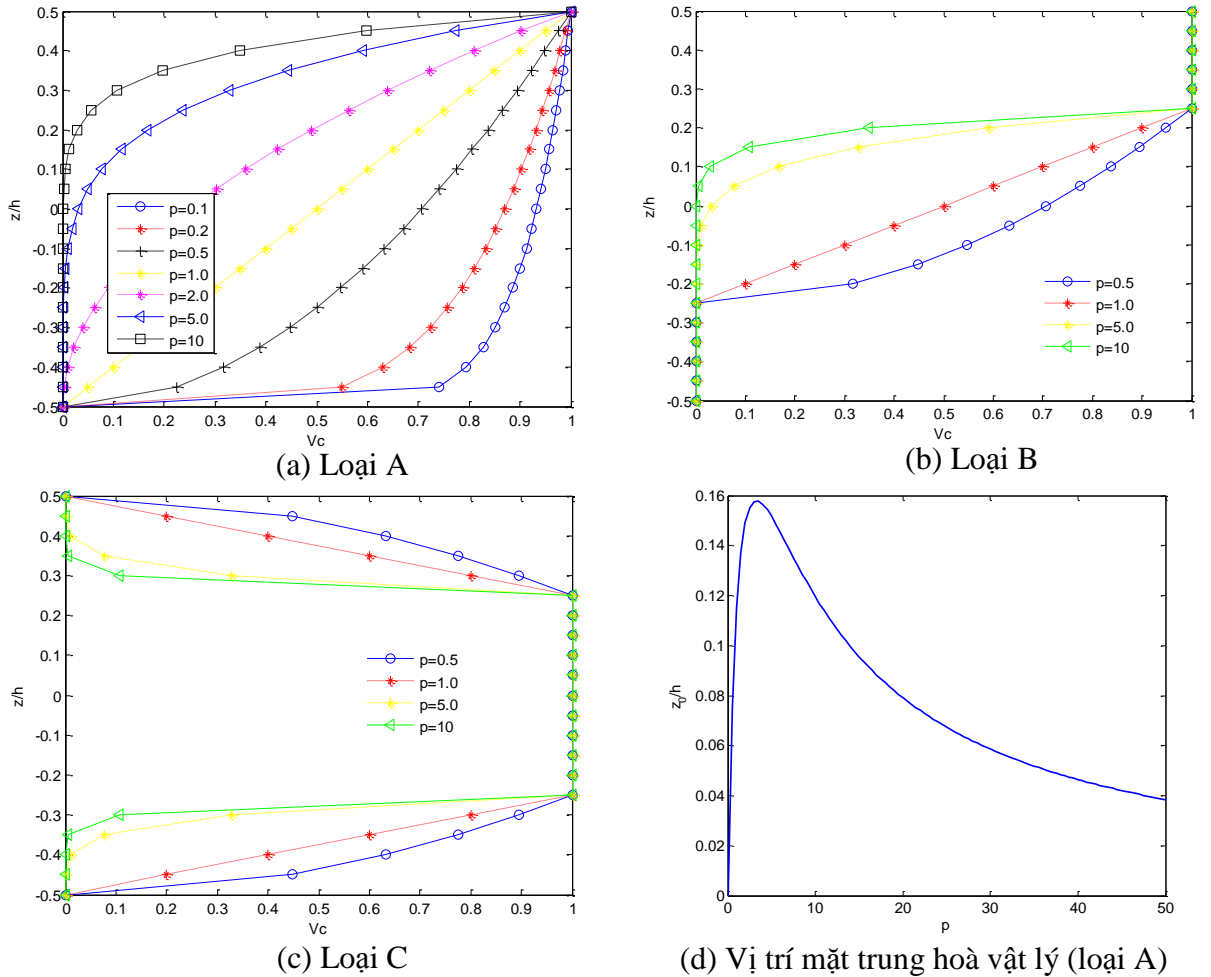
$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.2)$$

- Tấm loại C: là tấm composite với lớp trên, lớp dưới được chế tạo từ gốm và kim loại, và lõi giữa được làm từ gốm (lõi cứng) hay kim loại (lõi mềm) (**Hình 2.1d**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.3)$$

Đặc trưng hữu hiệu của tấm cũng được xác định theo quy luật hàm mũ 126 (EGM):

$$P^{(j)}(z) = P_c \left(\frac{P_m}{P_c} \right)^{V_c^{(j)}} \quad (2.4)$$



Hình 2.1: Giá trị V_c và vị trí mặt trung hoà vật lý theo chiều dày tấm

2.3 Phương pháp làm giảm số ẩn số

Trường chuyển vị (1.2) được viết lại:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + (z - z_0) \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + (z - z_0) \frac{\partial w_b}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.4 Vị trí mặt trung hoà vật lý

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} zE(z)dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z)dz} \quad (2.6)$$

2.5 Phương trình năng lượng

Nguyên lý biến phân Hamilton của một hệ được xác định:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K + \delta U_F) dt \quad (2.7)$$

2.6 Quan hệ giữa nội lực và biến dạng

Phương trình ứng xử của tấm FGM biểu diễn mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

2.7 Hệ số điều chỉnh biến dạng cắt

Độ cứng cắt cải tiến (H):

$$H_{44} = H_{55} = H = \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{[R_{11}(z)]^2}{G(z)} dz \right)^{-1} \quad (2.9)$$

Hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến (κ^s) được xác định:

$$\kappa^s = \frac{H}{\int_{-h/2}^{h/2} C_{55}(z) dz} \quad (2.10)$$

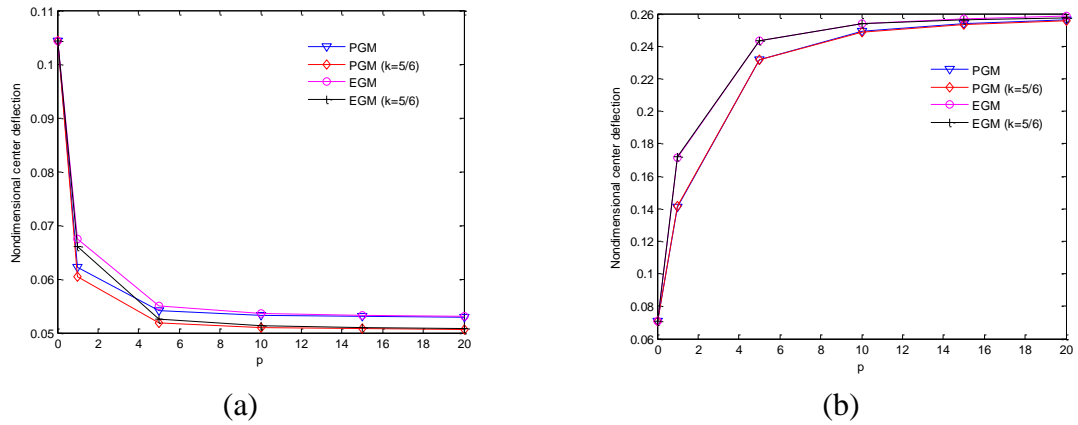
2.8 Kết quả số

Bảng 2.1: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

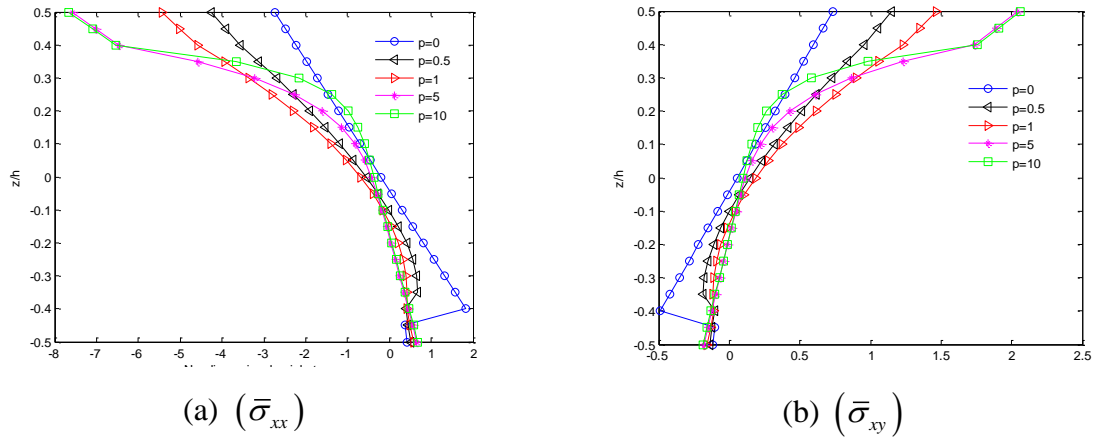
Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Aluminum (Al)	70	2707	0.3
Aluminum (Al*)	70	2702	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3
Zirconia (ZrO ₂)	151	3800	0.3
Silicon carbide (SiC)	420	3210	0.3
Tungsten carbide (WC)	700	15800	0.3

2.8.1 Bài toán tĩnh

Kết quả phân tích chuyển vị của tấm loại C cho cả hai loại hàm mật độ thể tích (PGM và EGM) được thể hiện như **Hình 2.2**. Mô hình sử dụng độ cứng cắt cải tiến (H) được so sánh với lời giải sử dụng hệ số điều chỉnh cắt $\kappa^s = 5/6$. Kết quả cho thấy: giá trị chuyển vị thay đổi khi hệ số đặc trưng vật liệu (p) thay đổi, cụ thể cho trường hợp tấm lõi mềm thì chuyển vị (\bar{u}_3) tăng khi p tăng và ngược lại cho trường hợp lõi cứng. **Hình 2.3** thể hiện giá trị ứng suất màng phân bố theo chiều dày tấm loại B.



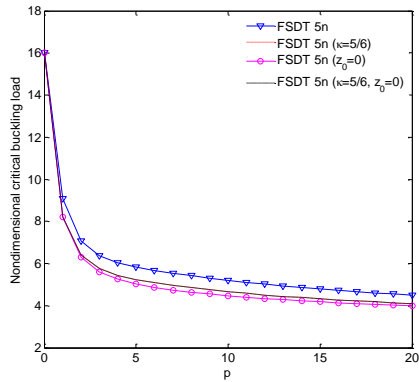
Hình 2.2: Giá trị chuyển vị (\hat{u}_3) của tấm (1-2-1) FG sandwich (type C, Al*/Al₂O₃) hình vuông ((a): lõi mềm, (b): lõi cứng) tựa đơn ($a/h = 10$)



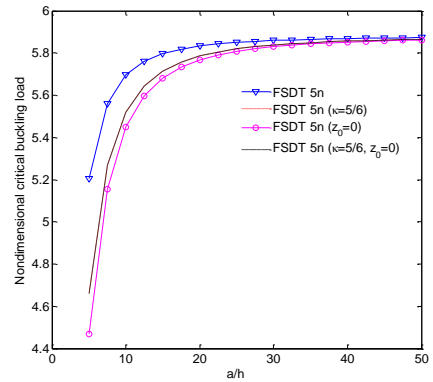
Hình 2.3: Giá trị ứng suất của tấm (1-8-1) (loại B, Al*/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

2.8.2 Bài toán ổn định

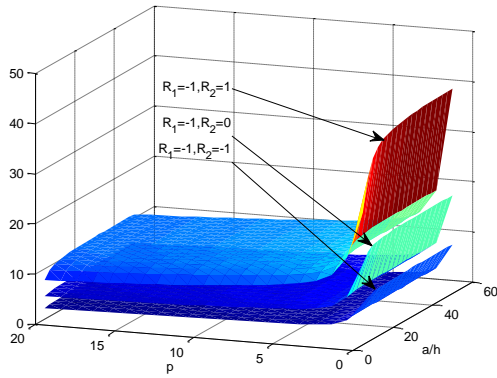
Khảo sát sự ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) (**Hình 2.4**), sự ảnh hưởng của chiều dày tỉ đối (a/h) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) (**Hình 2.5**), sự ảnh hưởng của chiều dày tỉ đối (a/h) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) khác nhau (**Hình 2.6**), sự ảnh hưởng của chiều dày tỉ đối (a/h) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) cho các loại vật liệu khác nhau (**Hình 2.7**) của tấm FGM (loại A).



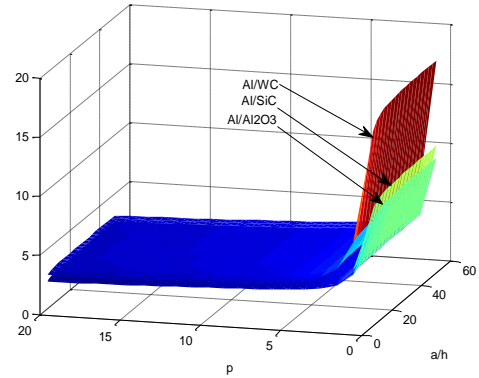
Hình 2.4: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông ($a/h = 10, R_1 = -1, R_2 = 0$)



Hình 2.5: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông ($p = 10, R_1 = -1, R_2 = 0$)

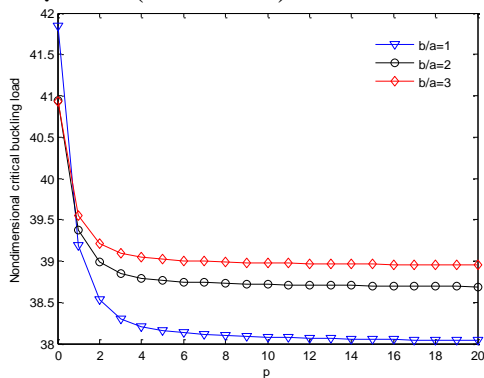


Hình 2.6: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (type A, Al/Al₂O₃) hình vuông

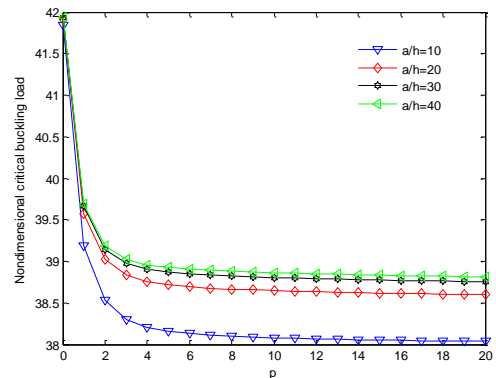


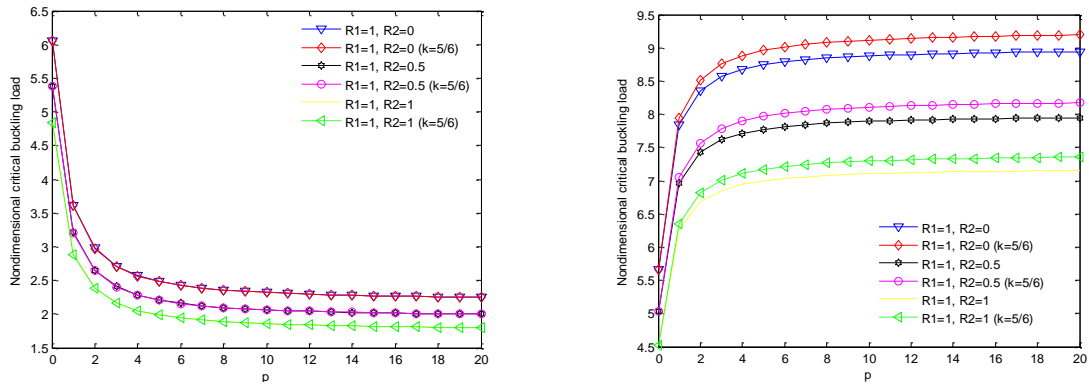
Hình 2.7: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông

Bên cạnh đó, giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) cũng được xét sự ảnh hưởng do thay đổi tỉ lệ hai cạnh và tỉ số giữa cạnh trên chiều dày tấm trên nền đàn hồi (**Hình 2.8**), ảnh hưởng do hệ số đặc trưng vật liệu (p) trong trường hợp tấm lõi cứng (**Hình 2.9a**) và tấm lõi mềm (**Hình 2.9b**), ảnh hưởng của tỉ số cạnh trên chiều dày tấm cho tấm sandwich lõi mềm với các loại cấu trúc tấm khác nhau đặt trên nền đàn hồi (**Hình 2.10**), ảnh hưởng của các giá trị phản lực nền (**Hình 2.11**).

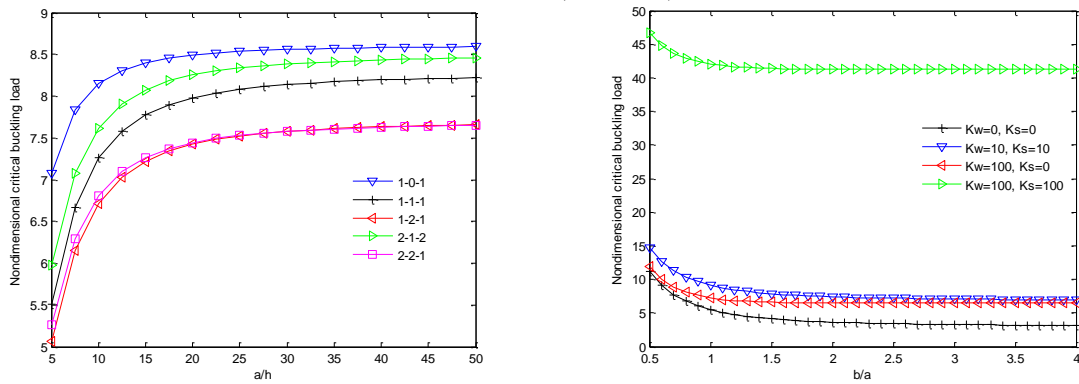


Hình 2.8: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (loại B, Al*/Al₂O₃) ($\bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 100, R_1 = 1, R_2 = 1, \text{PGM}$)





Hình 2.9: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-2-1) sandwich FGM (loại C, Al^*/Al_2O_3) hình chữ nhật ($a = 2b$)

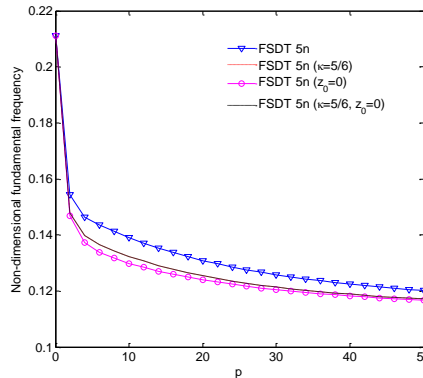


Hình 2.10: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của các loại tấm (1-1-1) (loại C, Al^*/Al_2O_3), lõi mềm ($p = 10, \bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 0, R_1 = 1, R_2 = 1, PGM$)

Hình 2.11: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-1-1) (loại C, Al^*/Al_2O_3), lõi mềm ($p = 10, a/h = 10, R_1 = 1, R_2 = 1, PGM$)

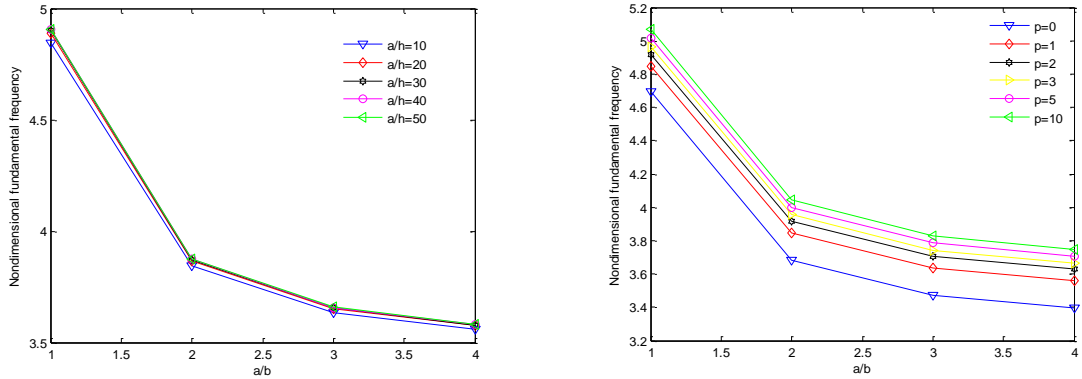
2.8.3 Bài toán dao động tự do

Khảo sát sự ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với tần số dao động riêng của tấm ($\bar{\omega}$) được trình bày trong **Hình 2.12**. Từ hình vẽ nhận thấy kết quả nghiên cứu lớn hơn so với các nghiên cứu truyền thống, điều này chứng tỏ tính tối ưu của lời giải phân tích tần số dao động riêng của kết cấu tấm.

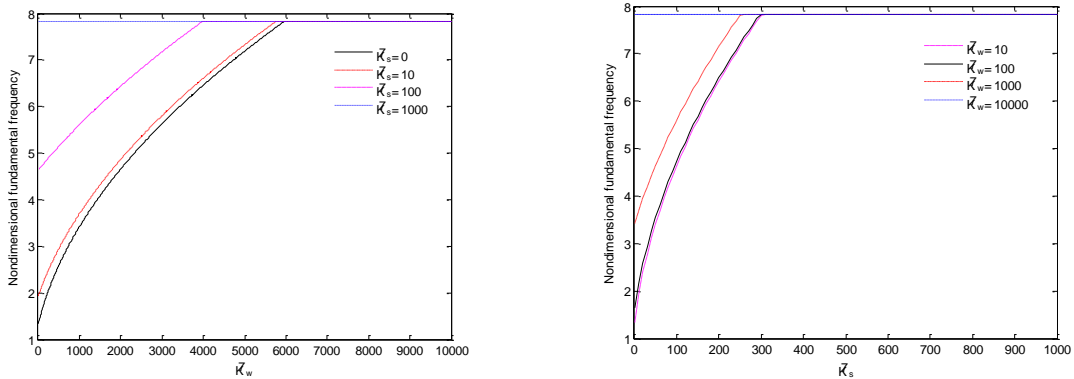


Hình 2.12: Giá trị tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (loại A, Al/Al_2O_3) hình vuông tựa đơn ($a/h = 5$)

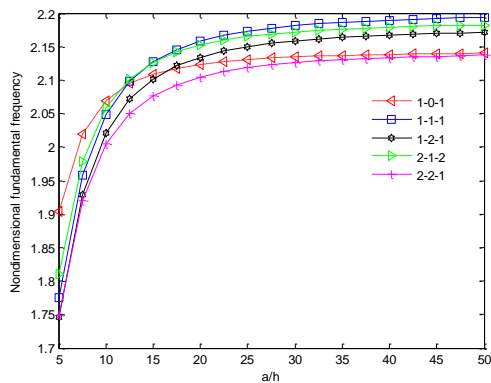
Tương tự, luận án cũng xét sự ảnh hưởng do thay đổi tỉ lệ hai cạnh và tỉ số giữa cạnh trên chiều dày tấm trên nền đàn hồi (**Hình 2.13**, ảnh hưởng của hệ số nền đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FG sandwich (**Hình 2.14**), ảnh hưởng của tỉ số cạnh trên chiều dày tấm đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của từng loại tấm FG sandwich (**Hình 2.15**) và xét ảnh hưởng của từng loại nền đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của từng loại tấm FG sandwich (**Hình 2.16**).



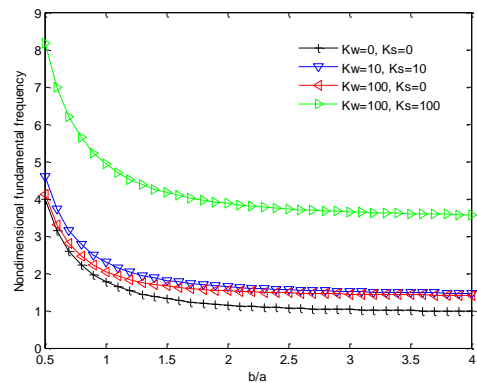
Hình 2.13: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (loại B, Al*/Al₂O₃) ($\bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 100, \gamma = 1, \text{PGM}$)



Hình 2.14: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm (1-2-1) sandwich FGM (loại C, Al*/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn (lõi cứng, $a/h = 10, p = 2, \text{PGM}$)



Hình 2.15: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của các loại tấm sandwich FGM (loại C, Al*/Al₂O₃) (lõi mềm, $p = 10, \bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 0, \text{PGM}$)



Hình 2.16: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của các loại tấm sandwich FGM (loại C, Al*/Al₂O₃) (lõi mềm, $p = 10, a/h = 10, \text{PGM}$)

2.9 Kết luận

Một hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến được áp dụng cho lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có xét đến ảnh hưởng của vị trí mặt trung hòa vật lý, hiệu ứng nền và đơn giản số biên số của trường chuyển vị để phân tích bài toán tĩnh, bài toán ổn định và bài toán dao động tự do của tấm FGM và tấm composite FGM khi dùng lời giải giải tích (Navier) và PP PTHH. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải theo lý thuyết FSĐT, HSDT, Quasi-3D và kể cả lời giải chính xác 3D của nhiều tác giả ứng với nhiều dạng bài toán khác nhau.
- Khi phân tích chuyển vị, lực tới hạn và tần số dao động trong tấm, kết quả của luận án lớn hơn so với các phương pháp nghiên cứu truyền thống. Điều này chứng tỏ tính tối ưu của luận án cho việc phân tích các loại bài toán này.
- Hiệu ứng của mặt trung hòa vật lý đến hệ số hiệu chỉnh cắt và các đáp ứng tấm FGM đề xuất trong luận án đã được làm rõ.
- Phương pháp giảm bớt số ẩn số của phương trình đặc trưng giúp đơn giản hoá các bước tính toán và lập trình.
- PP PTHH của luận án đã giải quyết được hiện tượng khoá cắt khi phân tích bài toán tĩnh theo FSĐT.

CHƯƠNG 3

MÔ HÌNH TẮM CHỨC NĂNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO

3.1 Điểm mới của luận án

- Đề xuất hàm biến dạng cắt bậc cao mới theo lý thuyết HSDT.
- Phân tích bài toán tấm FGM chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ theo lý thuyết Quasi-3D.
- Sử dụng lời giải Ritz để phân tích tấm FGM với các điều kiện biên khác nhau từ hàm biến dạng cắt bậc cao mới.

3.2 Trường chuyển vị và biến dạng theo HSDT

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ($\varepsilon_{zz} \neq 0$):

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\u_3(x, y, z) &= w(x, y) + g(z) \theta_z(x, y)\end{aligned}\quad (3.1)$$

trong đó $f(z)$ là hàm biến dạng cắt bậc cao, $g(z) = df/dz$. Một số hàm biến dạng cắt bậc cao đã phát triển (**Bảng 3.1**):

Bảng 3.1 Các hàm biến dạng cắt bậc cao

Tác giả	Hàm bậc cao
Reddy (TPT) 136	$f(z) = z(1 - 4z^2/3h^2)$
Mohammed Sobhy (RPT) 137	$f(z) = z/(1 + 4z^2/h^2)$
Touratier (SPT) 61	$f(z) = h \sin(\pi z/h)/\pi$
Soldatos (HPT1) 58	$f(z) = h \sinh(z/h) - z \cosh(1/2)$
Karama et al (EPT) 63	$f(z) = ze^{-2z^2/h^2}$
Mahi et al (HPT2) 138	$f(z) = (h/2) \tanh(2z/h) - 4z^3/3h^2 \cosh^2(1)$

Nguyên tắc thiết lập hàm biến dạng cắt theo HSDT:

- Hàm liên tục
- Mặt biến dạng là mặt cong.
- Thỏa mãn điều kiện tự do ứng suất cắt tại biên trên và dưới của tấm.
- Gồm hai thành phần: 1 thành phần là hàm bậc 3 tương ứng với vật liệu đồng nhất và 1 thành phần phù hợp cho vật liệu FGM.

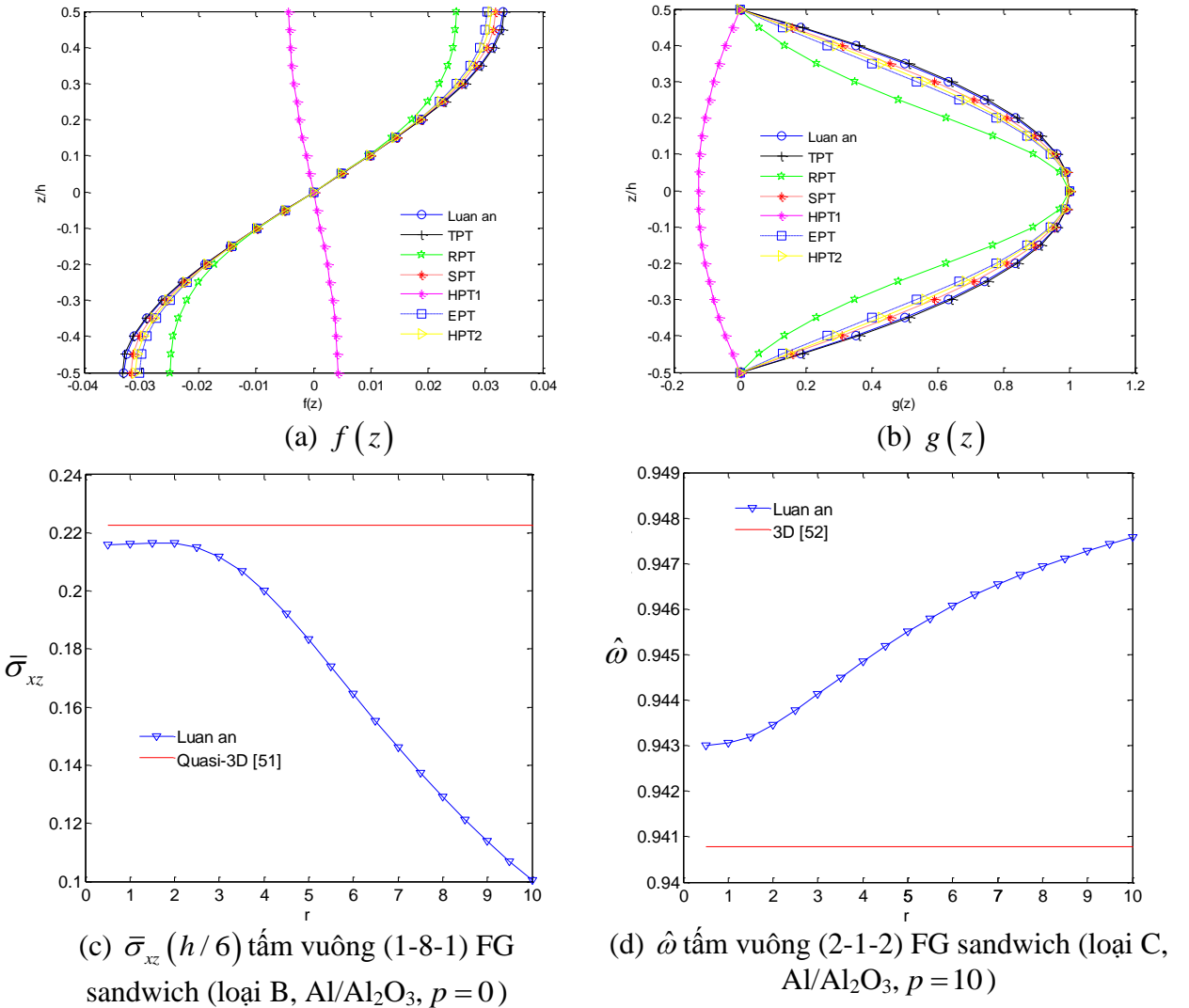
Vì vậy, hàm dạng $f(z)$ được chọn dưới dạng sau:

$$f(z) = f_1(z) + \alpha z^3 \quad (3.2)$$

trong đó α là hằng số. Hàm biến dạng cắt bậc cao đề xuất của luận án (NPT) có dạng như sau:

$$f(z) = h \arctan\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)} \quad (3.3)$$

trong đó r là tham số hiệu chỉnh (Luận án chọn $r = 1$ để phân tích ứng xử cho kết cấu tấm FGM – Hình 3.1); $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ là các thành phần chuyển vị và góc xoay tại vị trí mặt trung hoà của tấm.



Hình 3.1: Hàm biến dạng cắt bậc cao và tối ưu hệ số hiệu chỉnh cắt r

3.3 Phương trình ứng xử của tấm

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong tấm:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_y \Delta T \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_z \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (3.4a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.4b)$$

3.4 Phương trình năng lượng

3.4.1 Nguyên lý Hamilton

Nguyên lý biến phân Hamilton của một hệ được xác định:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (3.5)$$

3.4.2 Nguyên lý Lagrange

Để rút ra phương trình chuyển động, thêm hàm Lagrange được sử dụng:

$$\Pi = U + V - K \quad (3.6)$$

3.5 Phương pháp giải tích (lời giải Navier và Ritz)

Các hàm dạng áp đặt điều kiện biên theo lời giải Ritz (**Bảng 3.2**):

Bảng 3.2: Hàm dạng hyperbolic áp đặt điều kiện biên $X(x), Y(y)$

ĐKB	$X(x)$	$Y(y)$
SSSS	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
SSCC	$\sin(\lambda x)$	$\sin \beta_n y - \sinh \beta_n y - \delta_n (\cos \beta_n y - \cosh \beta_n y)$
CCSS	$\sin \alpha_m x - \sinh \alpha_m x - \varphi_m (\cos \alpha_m x - \cosh \alpha_m x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	$\sin \alpha_m x - \sinh \alpha_m x - \varphi_m (\cos \alpha_m x - \cosh \alpha_m x)$	$\sin \beta_n y - \sinh \beta_n y - \delta_n (\cos \beta_n y - \cosh \beta_n y)$

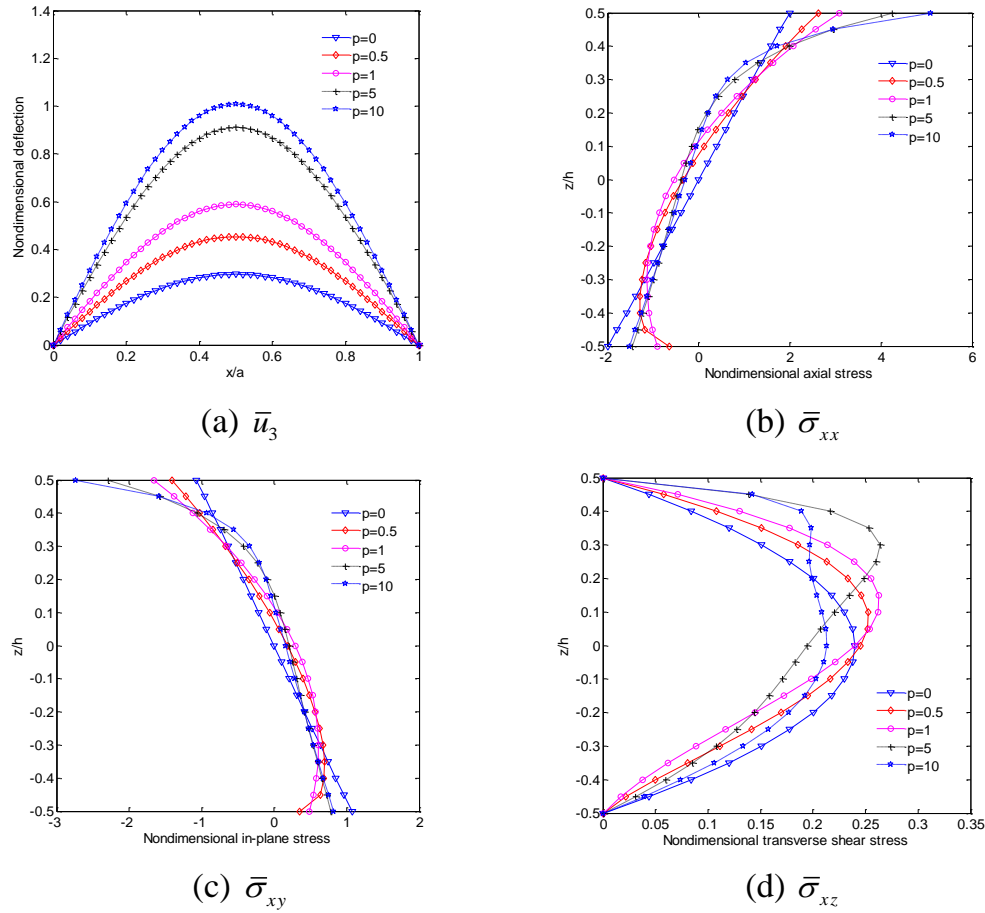
3.6 Kết quả số

Bảng 3.3: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

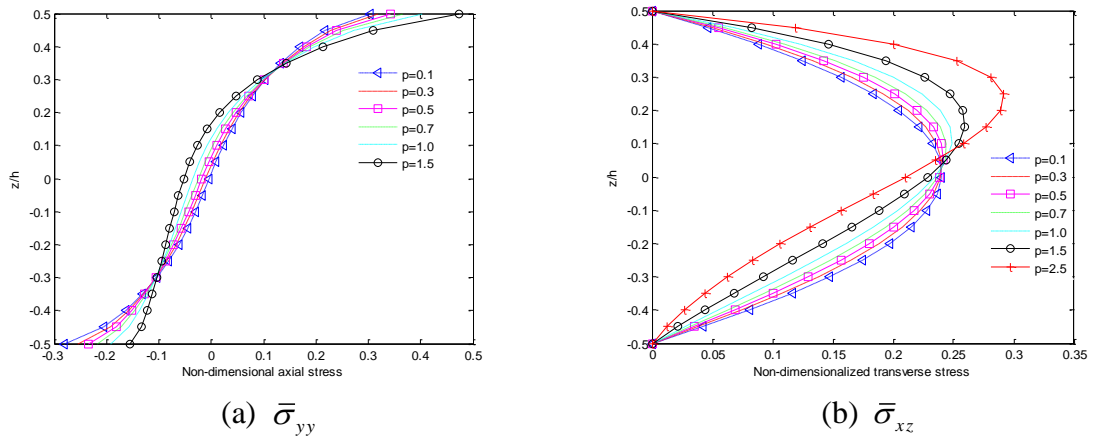
Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν	α (10 ⁻⁶ /K)
Aluminum (Al)	70	2707	0.3	23
Aluminum (Al*)	70	2702	0.3	23
Titanium (Ti-6Al-4V)	66.2	4430	0.3	10.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3	7
Zirconia (ZrO ₂)	151	3000	0.3	10
Zirconia (ZrO ₂ *)	117	3000	0.3	7.11

3.6.1 Bài toán tĩnh

Luận án biểu diễn các thành phần chuyển vị và ứng suất trong tấm khi không kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm (**Hình 3.2**). **Hình 3.3** biểu diễn các thành phần ứng suất trong tấm khi kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm.

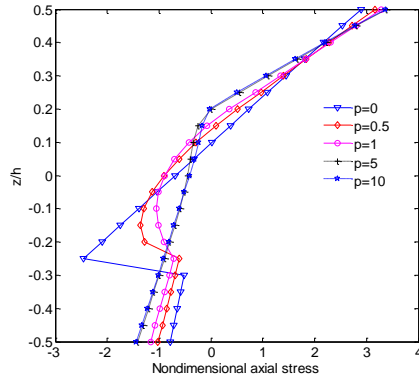


Hình 3.2: Giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A, $\varepsilon_{zz} = 0$, $a/h = 10$ và tải phân bố hình sin)

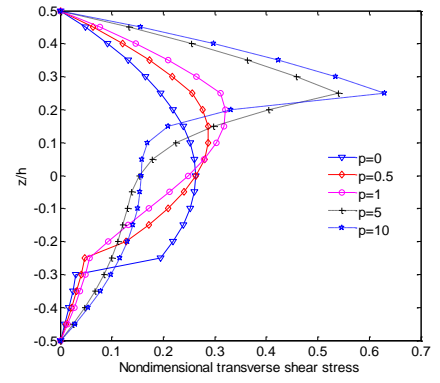


Hình 3.3: Giá trị ứng suất của tấm FGM thông thường (EGM, Al/Al₂O₃, loại A, $\varepsilon_{zz} \neq 0$, $a/h = 10$ và tải phân bố hình sin)

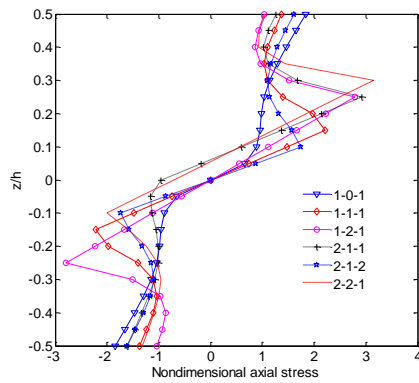
Bên cạnh đó, **Hình 3.4** biểu diễn các thành phần ứng suất phân bố trong tấm loại B và loại C khi không kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} = 0$).



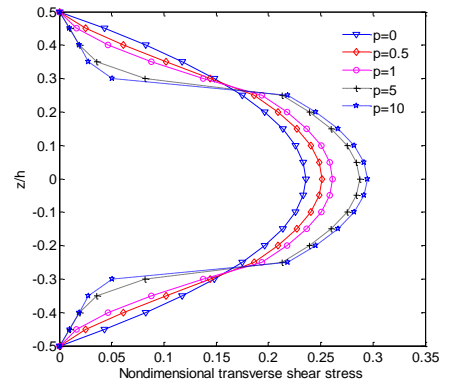
(a) $\bar{\sigma}_{xx}$ (1-2-1, Al/Al₂O₃, loại B)



(b) $\bar{\sigma}_{xz}$ (1-2-1, Al/Al₂O₃, loại B)



(c) $\hat{\sigma}_{xx}$ ($p=5$, Al/ZrO₂, loại C)

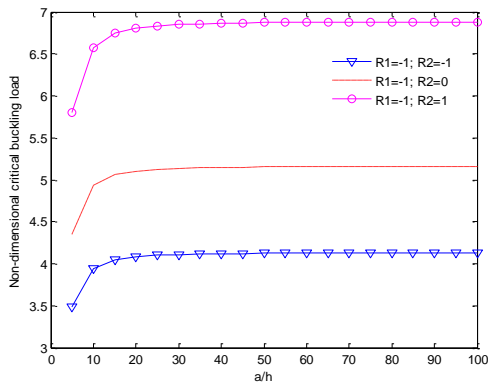


(d) $\bar{\sigma}_{xz}$ (1-2-1, Al/ZrO₂, loại C)

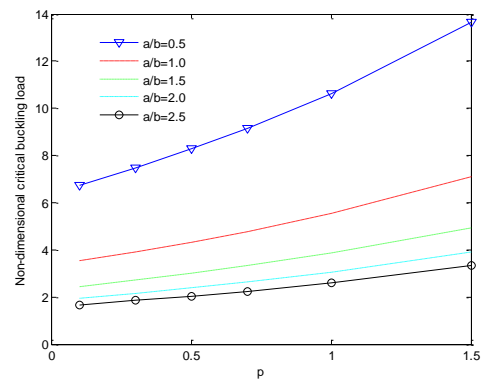
Hình 3.4: Ứng suất trong tấm (PGM, $a/h = 10$, tựa đơn và tải trọng phân bố hình sin)

3.6.2 Phân tích ổn định

Hình 3.5 và **3.6** biểu diễn ảnh hưởng về tỉ lệ cạnh trên chiều dày (a/h), tỉ lệ cạnh trên cạnh (a/b) của tấm loại A khi xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\epsilon_{zz} \neq 0$).



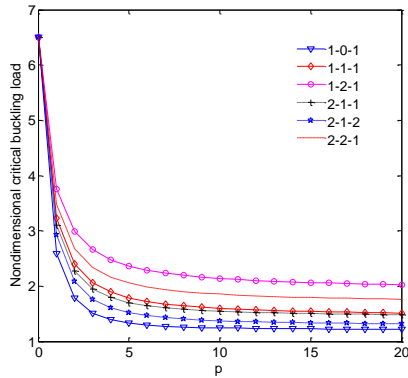
Hình 3.5: Ảnh hưởng tỉ số a/h đối với các lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) khác nhau của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A)



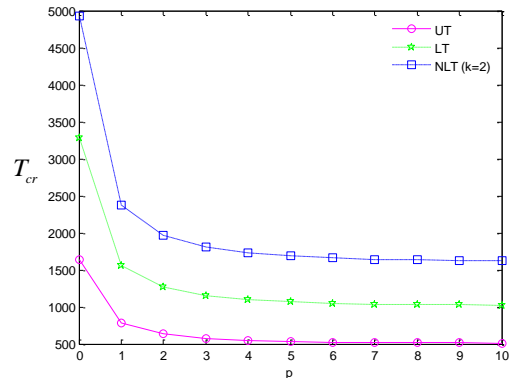
Hình 3.6: Ảnh hưởng tỉ số a/b đối với các lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A)

Hình 3.7 biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), cấu trúc của tấm loại C đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) khi không xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm

($\varepsilon_{zz} = 0$). **Hình 3.8** biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p) của tấm loại C đối với lực tới hạn do nhiệt (T_{cr}) ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) cho trường hợp: nhiệt độ thay đổi đều (UT), tuyến tính (LT) và phi tuyến (NLT).



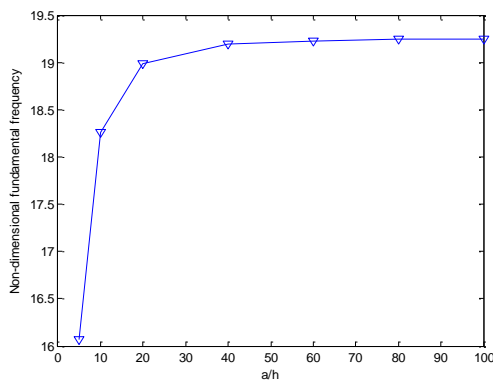
Hình 3.7: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm (EGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng, $a/h = 10$) hình vuông tựa đơn



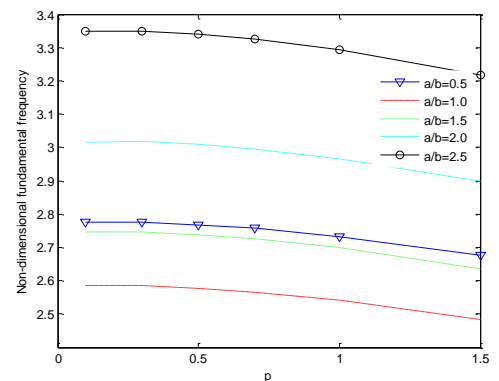
Hình 3.8: Giá trị lực tới hạn do nhiệt (T_{cr}) của tấm (1-1-1) (PGM, loại C, Al/Al₂O₃, lõi cứng) hình vuông tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi khác nhau ($a/h = 10$)

3.6.3 Phân tích dao động tự do

Hình 3.9, 3.10 biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), tỉ số hai cạnh (a/b) và tỉ số cạnh trên chiều dày (a/h) của tấm loại A khi xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).

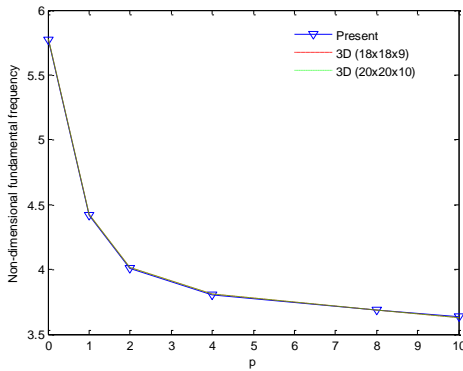


Hình 3.9: Ảnh hưởng tỉ số a/h đối với tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al*/ZrO₂, loại A) ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)

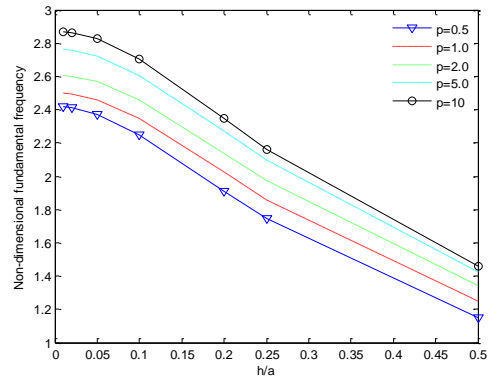


Hình 3.10: Ảnh hưởng tỉ số a/b và p đối với tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al*/ZrO₂, loại A) ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)

Luận án cũng tiến hành phân tích tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm khi dùng lời giải Ritz cho tấm loại A (**Hình 3.11**), **Hình 3.12** thể hiện ảnh hưởng của tỉ số h/a và giá trị p đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm có bốn biên liên kết ngàm.

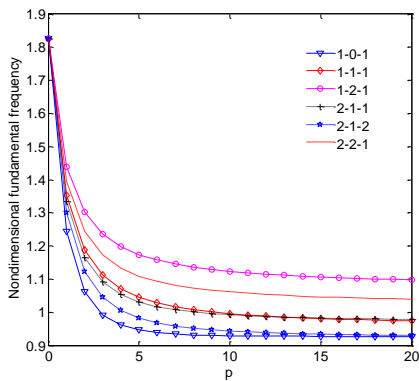


Hình 3.11: Ảnh hưởng giá trị p đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) tựa đơn ($\varepsilon_{zz} = 0$)

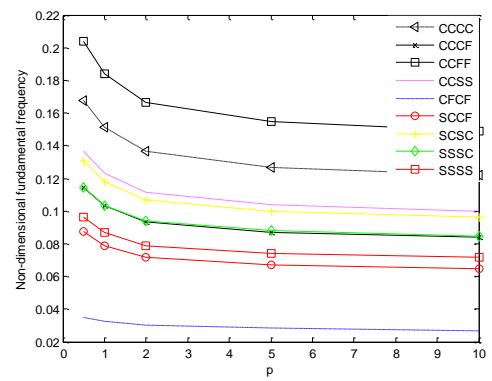


Hình 3.12: Ảnh hưởng tỉ số h/a đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) bốn biên ngàm ($\varepsilon_{zz} = 0$)

Trong **Hình 3.13** và **3.14** biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), cấu trúc phân lớp và các điều kiện biên khác nhau của tấm loại C khi không xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} = 0$).



Hình 3.13: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm sandwich FGM (EGM, Al/Al₂O₃, type C, lõi cứng, $a/h = 10$) hình vuông tựa đơn



Hình 3.14: Ảnh hưởng giá trị p đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông ($a/h = 10$)

3.7 Kết luận

Một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới được luận án xây dựng và phát triển để phân tích bài toán tĩnh, bài toán ổn định và bài toán dao động tự do của tấm FGM và tấm sandwich FGM chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ khi dùng lời giải Navier và Ritz. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu của luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải theo lý thuyết HSDT, Quasi-3D và lời giải chính xác 3D của nhiều tác giả ứng với nhiều dạng bài toán khác nhau.
- Một số kết quả của luận án có sự vượt trội nhất định khi đối chứng với các nghiên cứu khác cùng đối tượng nghiên cứu đặc biệt là khi phân tích tần số dao động tự do. Điều này chứng tỏ tính ưu việt của lý thuyết phát triển trong luận án.
- Lý thuyết phát triển trong luận án đã giải quyết được nhiều loại kết cấu tấm với các điều kiện biên phức tạp bằng phương pháp giải tích.

- Luận án cũng đã khảo sát rất chi tiết sự ảnh hưởng của mật độ vật liệu phân bố trong tấm, tỉ lệ hai cạnh, tỉ lệ cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc các phân lớp, các điều kiện biên khác nhau, các nguyên tắc biến đổi nhiệt độ theo chiều dày tấm, các lý thuyết áp dụng... lên các thành phần nội lực, ổn định và dao động trong kết cấu tấm. Điều này giúp cho các nhà nghiên cứu, các nhà thiết kế có được những dự báo cũng như các tiên đoán cần thiết khi nghiên cứu về các đối tượng này.
- Lý thuyết Quasi-3D (kể đến biến dạng theo phương z) rất phù hợp cho việc phân tích các kết cấu tấm chịu tải trọng do nhiệt độ.
- Từ kết quả phân tích ổn định nhiệt cho thấy kết cấu tấm bị mất ổn định sớm nhất khi nhiệt độ thay đổi đều theo chiều dày tấm. Qua đó đánh giá được mức độ an toàn của kết cấu trong môi trường truyền nhiệt.

CHƯƠNG 4

PHÂN TÍCH TẮM FGM BẰNG PHẦN TỬ TAM GIÁC 3 NÚT (MITC3) LÀM TRƠN SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO

4.1. Điểm mới của luận án

- Sử dụng phần tử MITC3 được làm trơn trên miền (CS), trên cạnh (ES) và trên nút (NS) để phân tích tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

4.2. Trường chuyển vị và biến dạng theo HSĐT

Để thuận tiện đánh giá phương pháp số phát triển, trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (166, 167):

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z) &= u(x, y) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) \theta_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \phi_x(x, y) \\u_2(x, y, z) &= v(x, y) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) \theta_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \phi_y(x, y) \\u_3(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\quad (4.1)$$

4.3. Phương trình năng lượng

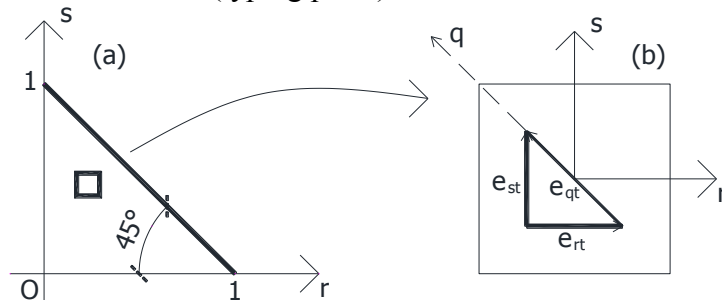
Phương trình cân bằng theo phiếm hàm năng lượng Larange:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma}) dA - \int_A q w dA - \frac{1}{2} \int_A \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}} dA \quad (4.2)$$

4.4. Mô hình phần tử MITC và phương pháp làm trơn

4.4.1 Mô hình MITC cho phần tử tam giác

Để khắc phục hiện tượng “khóa cắt” (shear locking) thì trường biến dạng cắt phải được xấp xỉ lại thông qua các “điểm buộc” (typing point) [168].



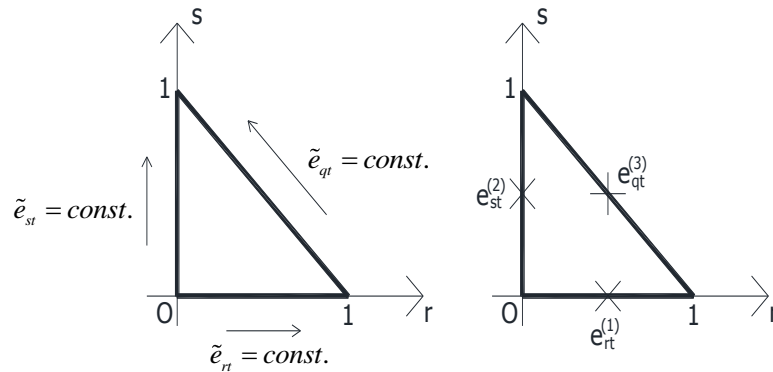
Hình 4.1: Cách xác định biến dạng cắt e_{qt}

Xét phần tử tam giác với hệ trục tọa độ tự nhiên được chọn như **Hình 4.1a**. Ta xây dựng trường biến dạng cắt e_{qt} (cạnh huyền tam giác) theo 2 thành phần e_{rt} và e_{st} (**Hình 4.1b**). Thành phần biến dạng cắt e_{qt} được xác định như sau:

$$e_{qt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st} - e_{rt}) \quad (4.3)$$

Hàm xấp xỉ đa thức được chọn cho các thành phần biến dạng cắt:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{rt} &= a_1 + b_1 r + c_1 s \\ \tilde{e}_{st} &= a_2 + b_2 r + c_2 s \\ \tilde{e}_{qt} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{e}_{st} - \tilde{e}_{rt}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(a_2 + b_2 r + c_2 s) - (a_1 + b_1 r + c_1 s)] \end{aligned} \quad (4.4)$$



Hình 4.2: Vị trí các điểm buộc “typing point” cho phần tử tam giác 3 nút

Các tham số của phương trình (4.4) được xác định theo các điểm buộc như **Hình 4.2** (với biến dạng cắt là hàng số theo mỗi cạnh tam giác), Áp dụng các điều kiện ràng buộc ta có:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{rt}(0,0) &= e_{rt}^{(1)}, \tilde{e}_{rt}(1,0) = e_{rt}^{(1)} \\ \tilde{e}_{st}(0,0) &= e_{st}^{(2)}, \tilde{e}_{st}(0,1) = e_{st}^{(2)} \\ \tilde{e}_{qt}(1,0) &= e_{qt}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st}^{(3)} - e_{rt}^{(3)}) \\ \tilde{e}_{qt}(0,1) &= e_{qt}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st}^{(3)} - e_{rt}^{(3)}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Thay (4.5) vào (4.4) thu được:

$$\begin{aligned} a_1 &= e_{rt}^{(1)}, b_1 = 0, c_1 = e_{st}^{(2)} - e_{rt}^{(1)} - e_{st}^{(3)} + e_{rt}^{(3)} \\ a_2 &= e_{st}^{(2)}, b_2 = -c_1, c_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Trường biến dạng cắt xấp xỉ:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{rt} &= e_{rt}^{(1)} + cs \\ \tilde{e}_{st} &= e_{st}^{(2)} - cr \end{aligned} \quad (4.7)$$

Quan hệ giữa biến dạng cắt và chuyển vị được viết lại:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n_{ij}} h_{ij}^k(r,s) \mathbf{B}_{ij}^s \Big|_{(r_{ij}^k, s_{ij}^k, t)} \right] \mathbf{d} = \tilde{\mathbf{B}}_{0i-MITC}^s \mathbf{d} \quad (4.8)$$

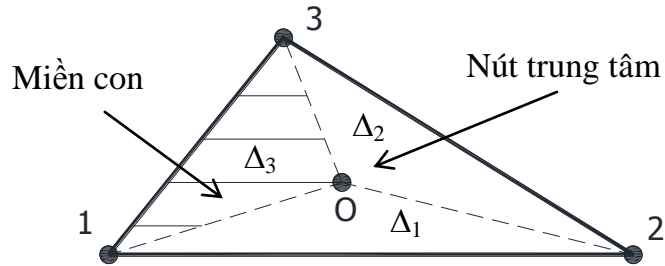
Thành phần liên quan ma trận độ cứng cắt:

$$\mathbf{S}_i = \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_{0i-MITC}^s \right)^T \quad \left(\mathbf{B}_{li}^s \right)^T \right] \quad (4.9)$$

4.4.2 Phương pháp làm tròn cho phần tử MITC3

4.4.2.1 Mô hình làm tròn trên miền (CS)

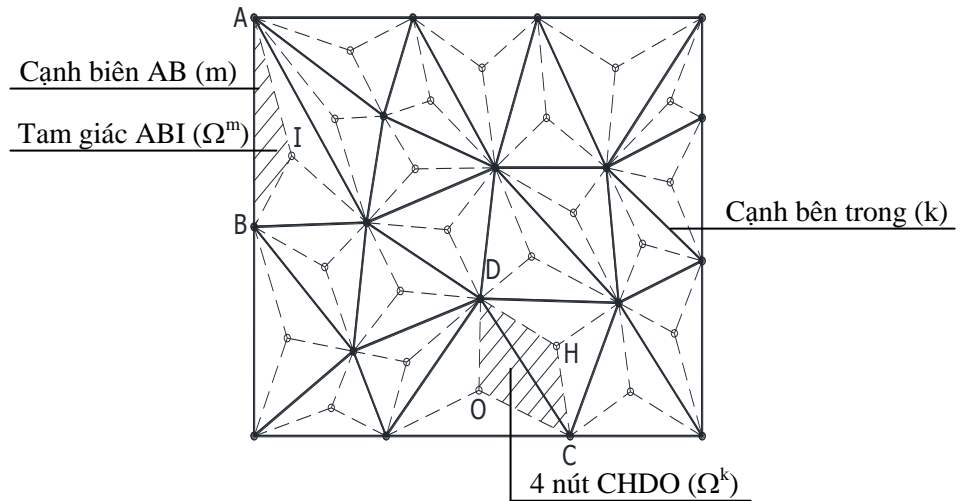
Mô hình làm tròn trên miền như **Hình 4.3**.



Hình 4.3: Các tam giác con trong phần tử CS-MITC3

4.4.2.2 Mô hình làm tròn trên cạnh (ES)

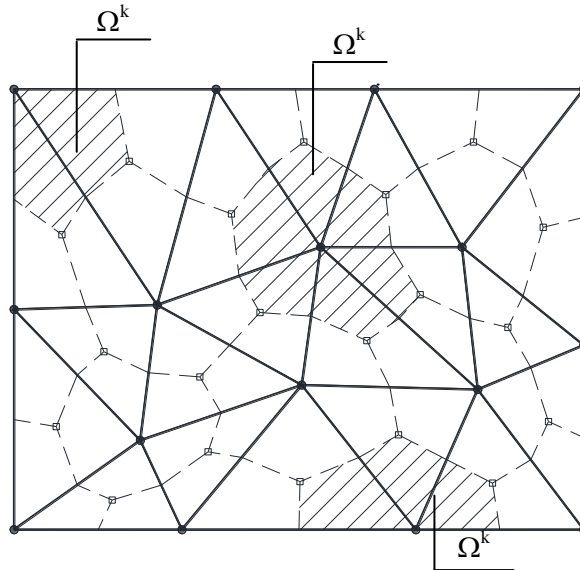
Mô hình làm tròn trên cạnh như **Hình 4.4**.



Hình 4.4: Miền làm tròn (Ω^k) theo phương pháp ES-MITC3

4.4.2.3 Mô hình làm tròn trên nút (NS)

Mô hình làm tròn trên nút như **Hình 4.5**.



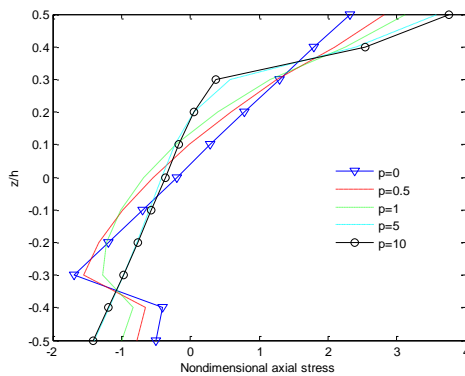
Hình 4.5: Miền làm trơn (Ω^k) theo phương pháp NS-MITC3

4.5. Kết quả số

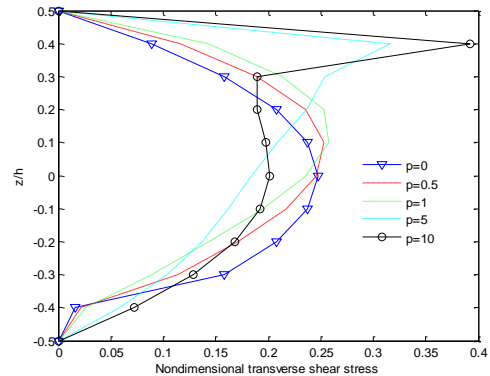
Bảng 4.1: Đặc tính vật liệu của kim loại và ceramic

Vật liệu	Môđun đàn hồi (GPa)	Khối lượng riêng (kg/m ³)	Hệ số Poisson
Aluminum (Al*)	70	2702	0.3
Aluminum (Al)	70	2707	0.3
Zirconia (ZrO ₂)	151	3000	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3

Trong **Hình 4.6** và **4.7** thể hiện giá trị ứng suất màng và ứng suất cắt phân bố theo chiều dày tấm.

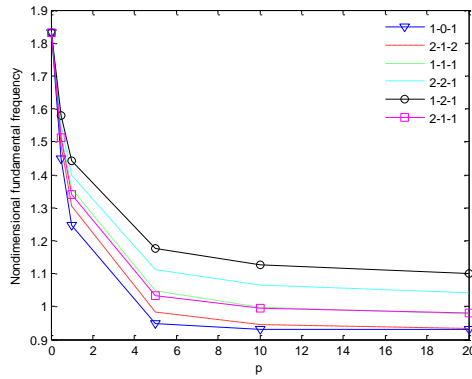


Hình 4.6: Ứng suất màng ($\bar{\sigma}_{xx}$) của sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1, ES) hình vuông tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ($a/h = 10$)

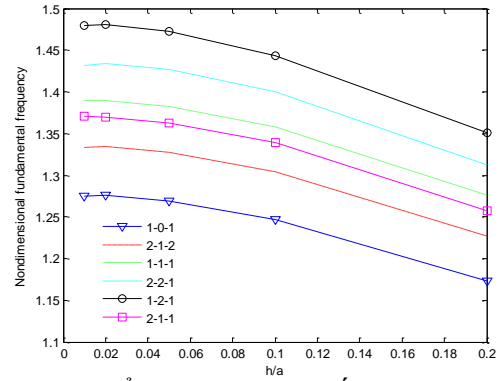


Hình 4.7: Ứng suất cắt ($\bar{\sigma}_{xz}$) của sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1, ES) hình vuông tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ($a/h = 10$)

Tương tự, **Hình 4.8** và **4.9** đánh giá ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), tỉ số h/a và cấu trúc vật liệu đối với giá trị tần số dao động.

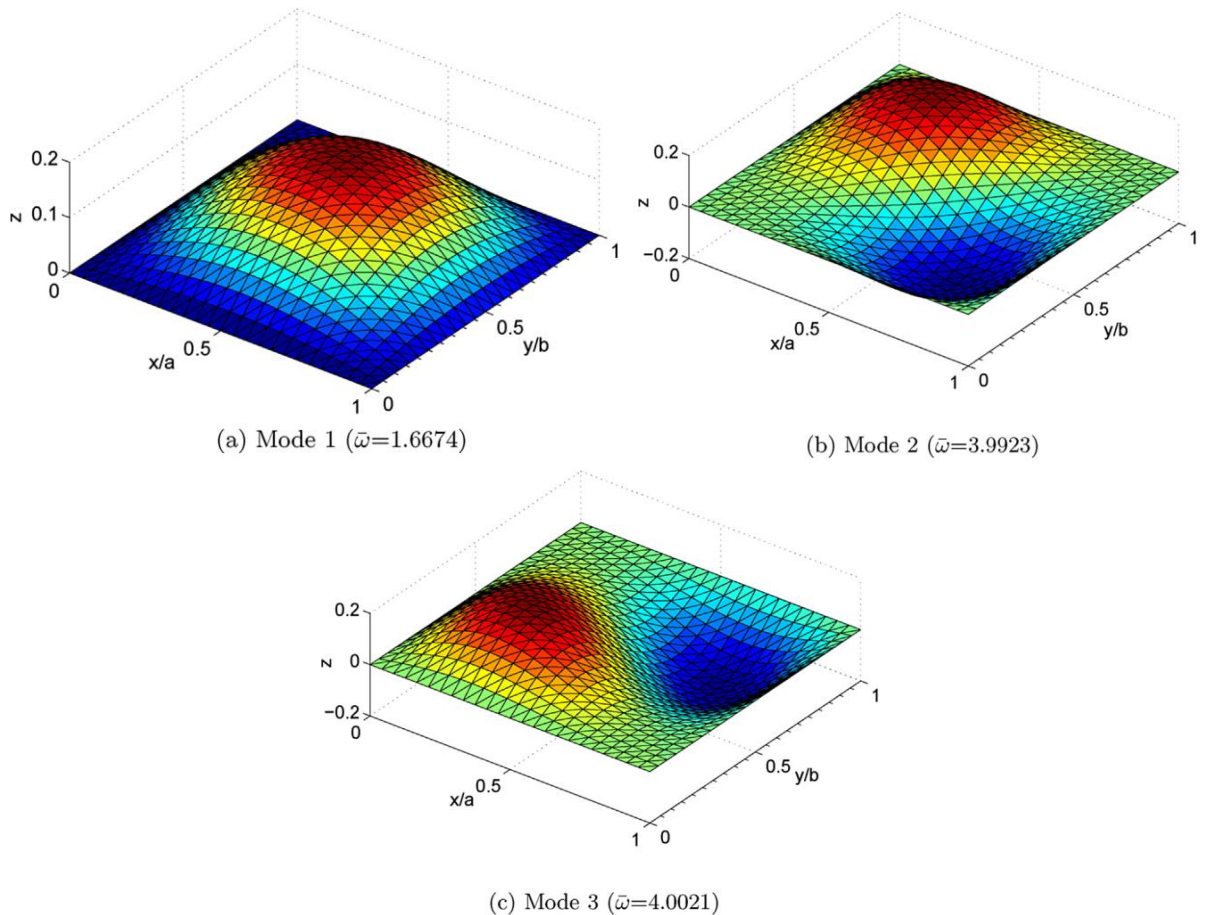


Hình 4.8: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃, type C, ES) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)



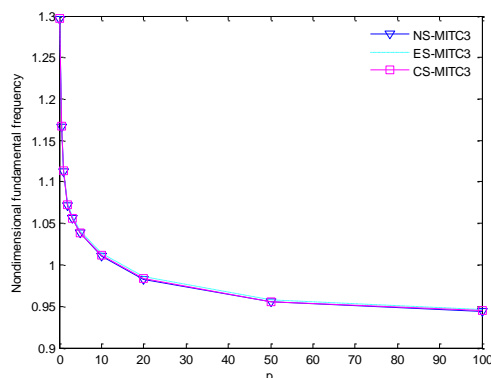
Hình 4.9: Ảnh hưởng của cấu trúc vật liệu và tỉ số h/a đối với tần số ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃, type C, ES) hình vuông tựa đơn ($p = 1$)

Bên cạnh đó, các dạng dao động đầu tiên của tấm Al/Al₂O₃ (loại A) được thể hiện trong **Hình 4.10**.



Hình 4.10: Dạng dao động riêng của tấm FGM thông thường (Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$, $p = 5$)

Cuối cùng, để khẳng định lại mức độ chính xác của các phương pháp: NS-MITC3, ES-MITC3 và CS-MITC3 luận án xét lại tấm $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ (loại A) hình vuông có tỉ lệ chiều dài trên chiều dày tấm $a/h = 10$, bốn biên tựa đơn. Độ chính xác được so sánh thông qua mối quan hệ giữa giá trị tần số ($\hat{\omega}$) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) được biểu diễn trong **Hình 4.11**.



Hình 4.11: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm FGM thông thường ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$, loại A) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

4.6. Kết luận

Trong chương này đã phát triển các phần tử CS-MITC3, ES-MITC3 và NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của tấm FGM và tấm sandwich FGM chịu tải trọng cơ học khi dùng PP PTHH. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu của luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải theo lý thuyết HSDT, Quasi-3D và lời giải chính xác 3D của nhiều tác giả ứng với nhiều dạng bài toán khác nhau.
- Đã khử được hiện tượng khoá cứng khi kết quả phân tích là khá phù hợp cho bài toán tấm rất mỏng.
- Sử dụng phần tử bậc C^0 xấp xỉ trường chuyển vị giúp cho việc tính toán được đơn giản hơn.
- Các phần tử phát triển trong luận án có sự tương đồng về kết quả phân tích.

Luận án cũng đã khảo sát rất chi tiết sự ảnh hưởng của mật độ vật liệu phân bố trong tấm, tỉ lệ hai cạnh, tỉ lệ cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc các phân lớp, các điều kiện biên khác nhau, áp dụng trường chuyển vị theo lý thuyết HSDT của luận án... lên các thành phần nội lực và dao động trong kết cấu tấm. Điều này giúp cho các nhà nghiên cứu, các nhà thiết kế có được những dự báo cũng như các tiên đoán cần thiết khi nghiên cứu về các đối tượng này.

CHƯƠNG 5

MÔ HÌNH TẮM SỬ DỤNG LÝ THUYẾT PHI TUYẾN HÌNH HỌC BẬC CAO

5.1. Điểm mới của luận án

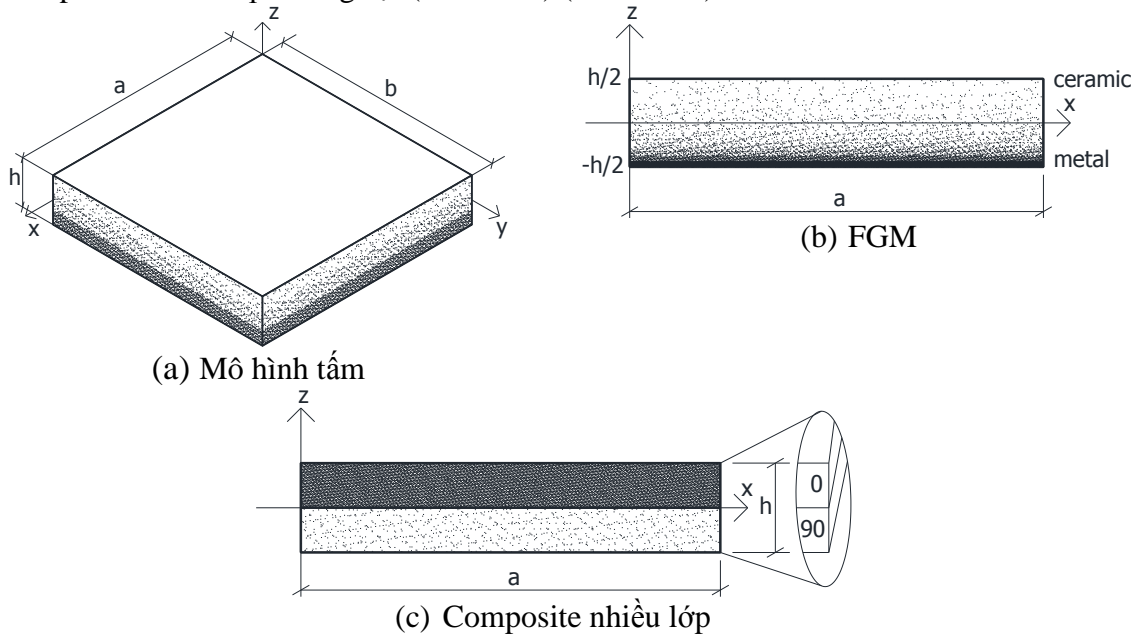
- Sử dụng phần tử MITC3 được làm tròn trên miền (CS) và trên cạnh (ES) để phân tích tấm FGM và tấm laminates theo lý thuyết phi tuyến hình học bậc cao.

5.2. Quan hệ biến dạng và chuyển vị theo lý thuyết phi tuyến

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \end{cases} \quad (5.1)$$

5.3 Phương trình ứng xử của tấm

Tấm hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều cao là h như **Hình 5.1** gồm hai loại tấm: FGM thông thường có hàm mật độ thể tích theo quy luật lũy thừa (**Hình 5.1b**) và composite nhiều lớp hướng sợi (laminates) (**Hình 5.1c**).



Hình 5.1: Mô hình tấm

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tại lớp thứ k của tấm composite nhiều lớp:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.2a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{55} & Q_{54} \\ Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.2b)$$

Phương trình để giải cho bài toán tìm theo phiếm hàm Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.3)$$

với q_i là các thành phần chuyển vị, \dot{q}_i là vận tốc chuyển động. Phương trình cân bằng:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad (5.4)$$

trong đó:

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} p \mathbf{N} d\Omega \quad (5.5)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_g \quad (5.6)$$

5.4 Phương pháp giải lặp Newton-Raphson

Trường chuyển vị tổng quát của phương pháp được giải từ phương trình:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1}) \mathbf{d}_{s+1} = \mathbf{P} \quad (5.7)$$

Phương pháp lặp được thực hiện:

$$\mathbf{R} \mathbf{d}_{s+1} = \mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1}) \mathbf{d}_{s+1} - \mathbf{P} \quad (5.8)$$

trong đó: \mathbf{R} là ma trận cứng dư, $\mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1})$ là ma trận cứng tuyến tính tương ứng với vector chuyển vị \mathbf{d}_{s+1}

Khai triển thành phần \mathbf{R} trong chuỗi Taylor ứng với trường chuyển vị \mathbf{d}_{s+1}^r :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{s+1} + \mathbf{K}_g \mathbf{d}_{s+1}^r \delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{NL} (\{\delta \mathbf{d}\}^2) \quad (5.9)$$

với: \mathbf{K}_{NL} là ma trận cứng phi tuyến, \mathbf{K}_g là ma trận cứng hình học.

Giá trị \mathbf{R}_{s+1}^r được xác định:

$$\mathbf{R}_{s+1}^r = \mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1}^r) \mathbf{d}_{s+1}^r - \mathbf{P} \quad (5.10)$$

Cuối cùng:

$$\delta \mathbf{d} = -[\mathbf{K}_g \mathbf{d}_{s+1}^r]^{-1} \mathbf{R}_{s+1}^r \quad (5.11)$$

$$\mathbf{d}_{s+1}^{r+1} = \mathbf{d}_{s+1}^r + \delta \mathbf{d} \quad (5.12)$$

5.5 Kết quả số

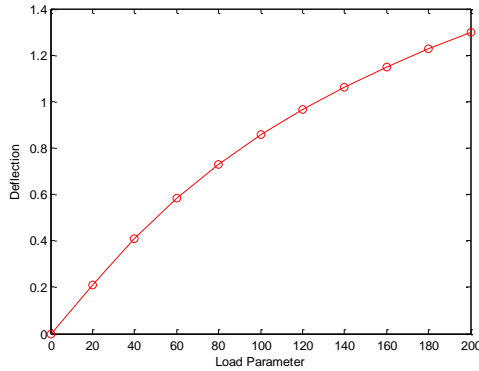
5.5.1 Tấm FGM thông thường

Tính chất vật liệu của các thành phần như sau:

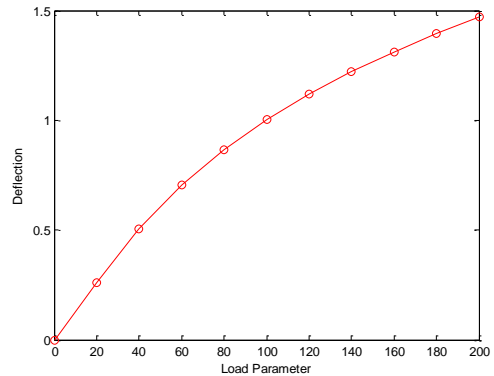
$$E_c = 348.43 \text{GPa}, \nu_c = 0.24 \text{ (vật liệu ceramic - Si}_3\text{N}_4\text{)}.$$

$$E_m = 201.04 \text{GPa}, \nu_m = 0.3262 \text{ (vật liệu kim loại - SUS304)}.$$

Kết quả tính toán được thể hiện trong **Hình 5.2**, **Hình 5.3** về mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phần tử CS-MITC3.



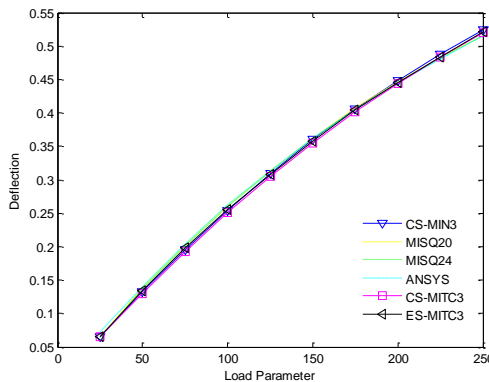
Hình 5.2: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông FGM ($p = 0.2$) liên kết ngàm ($a/h = 10$, CS)



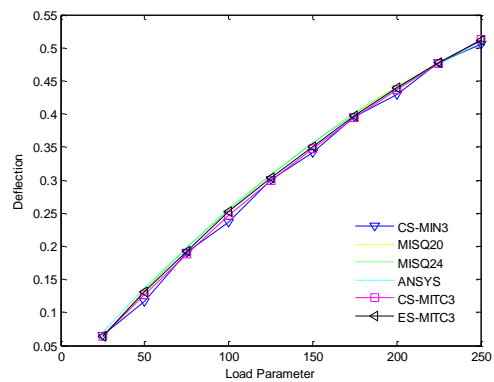
Hình 5.3: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông FGM ($p = 2.0$) liên kết ngàm ($a/h = 10$, CS)

5.5.2 Tấm composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$

Trong phần này, luận án sẽ tiến hành phân tích tấm composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ hình vuông có cạnh là (a), chiều dày tấm là (h) chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1=40E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$. Giả thiết chiều dày các lớp bằng nhau và bằng ($h/2$). Kết quả lời giải để thể hiện trong **Hình 5.4** và **5.5** thể hiện mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phần tử CS-MITC3.



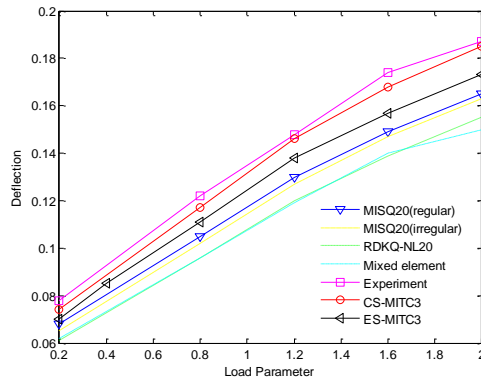
Hình 5.4: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ liên kết ngàm ($a/h = 50$)



Hình 5.5: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ liên kết ngàm ($a/h = 100$)

5.7.3 Tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Luận án tiếp tục phân tích tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ hình vuông có cạnh là $a=12$, chiều dày tấm là $h=0.096$ bốn biên ngàm chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1 = 1.8282 \times 10^6$, $E_2 = 1.8315 \times 10^6$, $\nu_{12} = 0.23494$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.125 \times 10^5$. Giả thiết chiều dày các lớp bằng nhau và bằng ($h/4$). **Hình 5.6** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phần tử CS-MITC3.

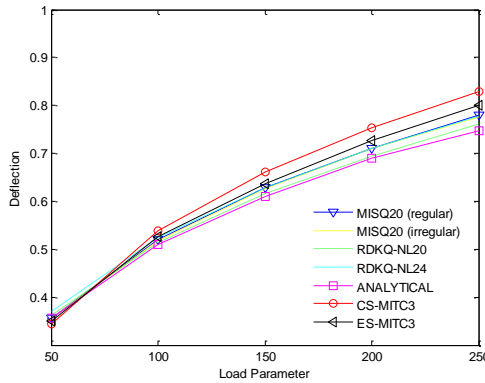


Hình 5.6: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ bốn biên liên kết ngàm

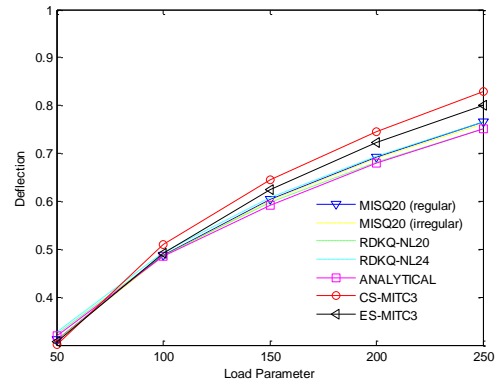
Hình 5.7, 5.8 và **5.9** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phương pháp nghiên cứu ứng với trường hợp $a/h=10$, $a/h=20$ và $a/h=40$.

- Tựa đơn SS1:

$$x = \pm a/2 : v_0 = w_0 = \theta_y = \phi_y = 0; y = \pm a/2 : u_0 = w_0 = \theta_x = \phi_x = 0$$



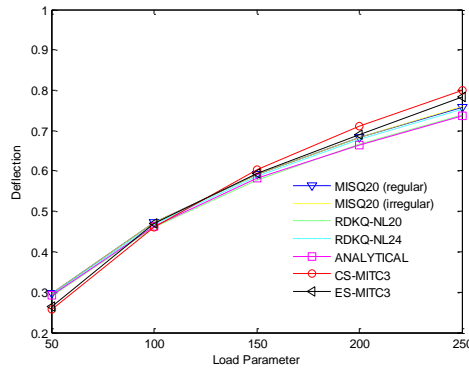
Hình 5.7: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS1 ($a/h=10$)



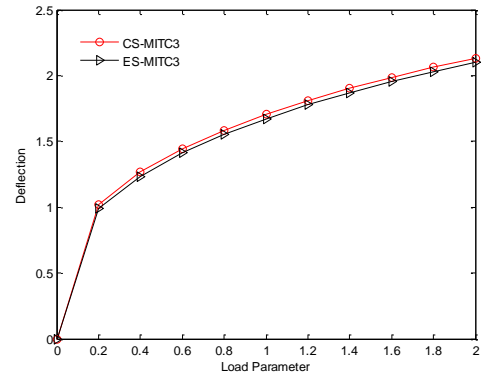
Hình 5.8: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS1 ($a/h=20$)

Cuối cùng, luận án xét lại tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ hình vuông có cạnh là $a=12$, chiều dày tấm là $h=0.096$ bốn biên tựa đơn SS3 chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1=1.8282 \times 10^6$, $E_2=1.8315 \times 10^6$, $\nu_{12}=0.23494$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=3.125 \times 10^5$. **Hình 5.10** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của hai phương pháp CS-MITC3 và ES-MITC3.

- Tựa đơn SS3: $x = \pm a/2 : u_0 = v_0 = w_0 = 0; y = \pm a/2 : u_0 = v_0 = w_0 = 0$



Hình 5.9: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS1 ($a/h = 40$)



Hình 5.10: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS3 ($a/h = 40$)

5.6 Kết luận

Trong chương này đã phát triển các phần tử CS-MITC3 và ES-MITC3 có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến để phân tích bài toán tĩnh của tấm FGM và tấm composite nhiều lớp chịu tải trọng cơ học khi dùng PP PTHH. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu của luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải tính toán theo các phương pháp khác nhau của nhiều tác giả ứng với một số dạng bài toán khác nhau.
- Sử dụng phần tử bậc C^0 xấp xỉ trường chuyển vị giúp cho việc tính toán được đơn giản hơn.
- Các phần tử phát triển trong luận án có sự tương đồng về kết quả phân tích.
- Luận án cũng đã khảo sát rất chi tiết sự ảnh hưởng của mật độ vật liệu phân bố trong tấm, tỉ lệ hai cạnh, tỉ lệ cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc các phân lớp, các điều kiện biên khác nhau, các cấp tải trọng... lên thành phần chuyển vị của tấm. Điều này giúp cho các nhà nghiên cứu, các nhà thiết kế có được những dự báo cũng như các tiên đoán cần thiết khi nghiên cứu về các đối tượng này.

CHƯƠNG 6

HIỆU ỨNG CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN CÁC ĐẶC TÍNH ĐÀN HỒI ĐỒNG NHẤT HÓA ĐẾN ỨNG XỬ TẮM FGM

6.1 Điểm mới của luận án

- Phát triển hàm biến dạng cắt bậc cao mới của luận án cho các mô hình xác định các đặc tính hữu hiệu khác nhau.
- Đánh giá ảnh hưởng của các mô hình xác định các đặc tính hữu hiệu đến quá trình ứng xử của vật liệu FGM.
- Đánh giá ảnh hưởng của các quy luật phân bố vật liệu đến quá trình ứng xử của vật liệu FGM.

6.2 Các mô hình tính toán các đặc tính đàn hồi hữu hiệu tấm FGM

- Mô hình Voigt (3, 4, 5):

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m V(z) + E_c (1 - V(z)) \\ \nu(z) &= \nu_m V(z) + \nu_c (1 - V(z)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

- Mô hình Reuss (3, 4, 5):

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{E_m E_c}{E_m (1 - V(z)) + E_c V(z)} \\ \nu(z) &= \frac{E_m E_c}{\nu_m (1 - V(z)) + \nu_c V(z)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

- Mô hình Hashin-Shtrikman (6, 7):

$$E(z) = \frac{9G(z)K(z)}{G(z) + 3K(z)}, \quad \nu(z) = \frac{3K(z) - 2G(z)}{2(G(z) + 3K(z))} \quad (1.3)$$

trong đó $G(z)$, $K(z)$ xác định theo nguyên lý cận trên và cận dưới:

- Cận dưới:

$$G^-(z) = G_c + \frac{V(z)}{\left\{ \frac{1}{G_m - G_c} + \frac{6(K_c + 2G_c)(1-V(z))}{5G_c(3K_c + 4G_c)} \right\}}$$

$$K^-(z) = K_c + \frac{V(z)}{\left\{ \frac{1}{K_m - K_c} + \frac{3(1-V(z))}{(3K_c + 4G_c)} \right\}}$$
(1.4a)

- Cận trên:

$$G^+(z) = G_m + \frac{(1-V(z))}{\left\{ \frac{1}{G_c - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V(z)}{5G_m(3K_m + 4G_m)} \right\}}$$

$$K^+(z) = K_m + \frac{(1-V(z))}{\left\{ \frac{1}{K_c - K_m} + \frac{3V(z)}{(3K_m + 4G_m)} \right\}}$$
(1.4b)

- Mô hình Tamura (8, 9):

$$E(z) = \frac{(1-V(z))E_c(q_T - E_m) + V(z)E_m(q_T - E_c)}{(1-V(z))(q_T - E_m) + V(z)(q_T - E_c)}$$

$$v(z) = v_m V(z) + v_c (1-V(z))$$
(1.5)

với q_T “stress-to-strain transfer” là tham số tính toán.

- Mô hình SCM (Self-Consistent Method) (10, 11):

$$V(z) = \frac{\frac{K_c}{K_c + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{5G_m}{G(z) - G_m} + 2}{\frac{K_c}{K_c + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{5G_m}{G(z) - G_m} - \frac{K_m}{K_m + \frac{4}{3}G(z)} - \frac{5G_c}{G(z) - G_c}}$$

$$K(z) = \frac{1}{\frac{V(z)}{K_m + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{1-V(z)}{K_c + \frac{4}{3}G(z)}} - \frac{4}{3}G(z)$$
(1.6)

- Mô hình LRVE được xây dựng bởi Gasik và Lilius (12, 13):

$$E(z) = E_c \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right), \quad FE = \frac{1}{1 - E_c / E_m}$$

$$v(z) = v_m V(z) + v_c (1-V(z))$$
(1.7)

Hàm mật độ thể tích:

$$VF = VF_t + (VF_b - VF_t) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \quad (\text{P-FGM}) \quad (6.8a)$$

$$VF = \begin{cases} VF_t + (VF_b - VF_t) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h} \right)^p \right), & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ VF_t + (VF_b - VF_t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h} \right)^p \right), & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{S-FGM}) \quad (6.8b)$$

$$VF = VF_t \exp \left(\ln \left(\frac{VF_b}{VF_t} \right) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \right) \quad (\text{E-FGM}) \quad (6.8c)$$

6.3 Các mô hình tính toán các đặc tính đàn hồi hữu hiệu tấm FGM

Để đánh giá sự ảnh hưởng của các mô hình tính toán các đặc trưng hữu hiệu khi phân tích ứng xử vật liệu FGM, luận án tiến hành phân tích lại các mô hình: Voigt, Reuss, Hashin (LB), Hashin (UB), LRVE, Tamura, SCM cho kết cấu tấm FGM sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ($\varepsilon_{zz} = 0$) của Chương 3.

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \left(h \arctan \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{16z^3}{15h^2} \right) \theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \left(h \arctan \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{16z^3}{15h^2} \right) \theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (6.9)$$

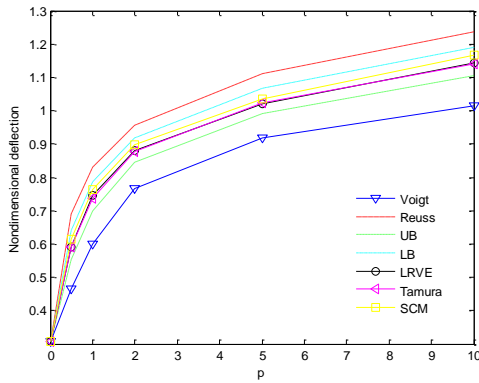
6.4 Kết quả số

Bảng 6.1: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

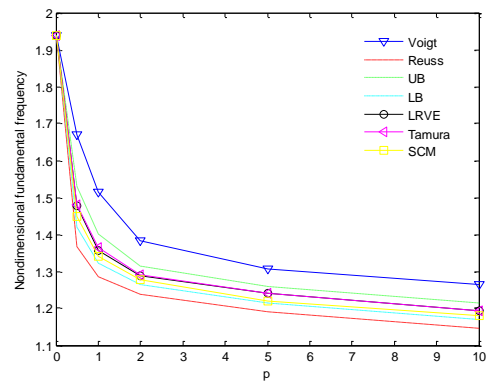
Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Aluminum alloy 1100	69	2710	0.33
Ceramic (Al ₂ O ₃ 99% pure)	380	3980	0.22

6.4.1 Đánh giá ảnh hưởng của các mô hình nghiên cứu

Ảnh hưởng của các mô hình nghiên cứu đến các ứng xử của tấm FGM tựa đơn với cấu trúc vật liệu phân bố theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM) được phân tích trong phần này. Ảnh hưởng của các mô hình vật liệu đối với ứng xử của kết cấu tấm FGM thông thường (loại A, B và C) thông qua **Hình 6.1**, **6.2** và **6.3**.

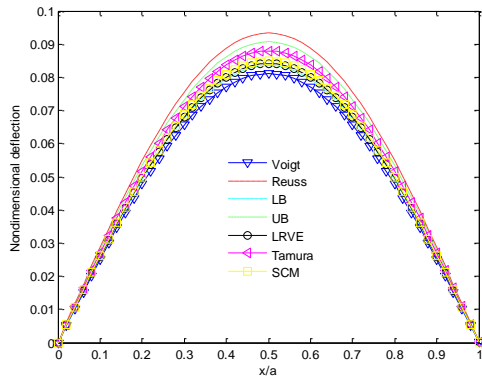


(a)

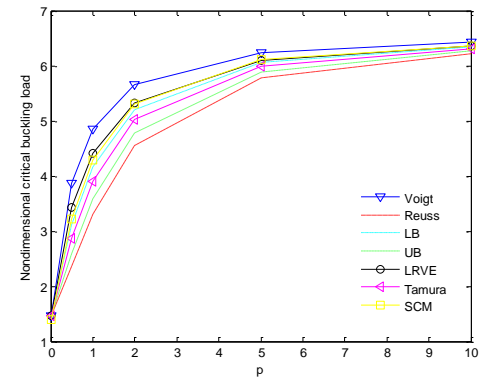


(b)

Hình 6.1: Ảnh hưởng của các mô hình đối với ứng xử của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)



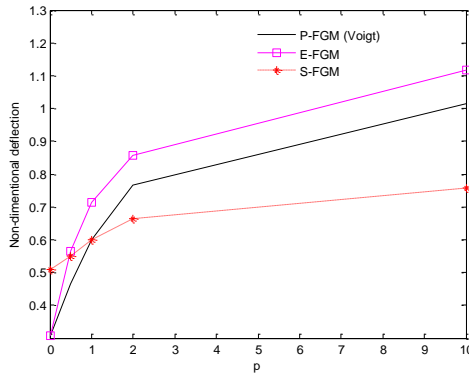
Hình 6.2: Ảnh hưởng của các mô hình đối với chuyển vị (\bar{u}_3) tấm FG sandwich (loại B, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($p = 10, a/h = 10$)



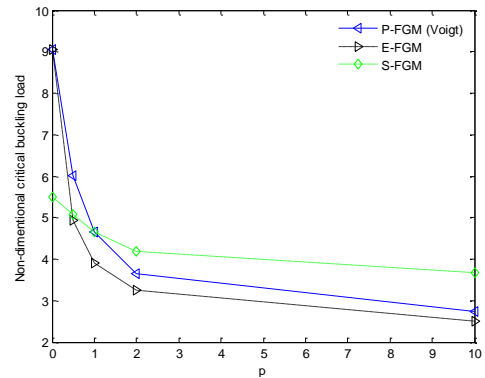
Hình 6.3: Ảnh hưởng của các mô hình đối với lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) tấm (1-1-1) FG sandwich (loại C, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 100$)

6.4.2 Đánh giá ảnh hưởng của các quy luật phân bố vật liệu

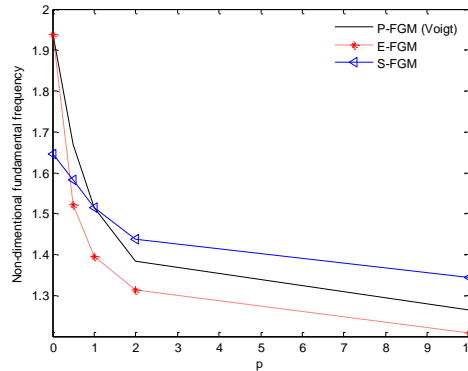
Tương tự, để đánh giá mức độ ứng xử của tấm FGM thông thường (loại A) khi thay đổi các quy luật phân bố vật liệu (P-FGM, E-FGM và S-FGM) theo (6.8), luận án cũng tiến hành phân tích các giá trị chuyển vị, lực tới hạn và tần số dao động của tấm được thể hiện trong **Hình 6.4**, **6.5** và **6.6**



Hình 6.4: Đánh giá thành phần chuyển vị (\bar{u}_3) giữa các quy luật phân bố vật liệu tấm FGM (loại A, $a/h = 10$, $p = 10$)



Hình 6.5: Đánh giá thành phần lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) giữa các quy luật phân bố vật liệu tấm FGM (loại A, $a/h = 10$, $p = 10$)



Hình 6.6: Đánh giá thành phần tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$) giữa các quy luật phân bố vật liệu tấm FGM (loại A, $a/h = 10$, $p = 10$)

6.4 Kết luận

Chương này đã trình bày ứng xử của tấm FGM dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới mà luận án đã phát triển ở Chương 3. Một số mô hình hàm mật độ thể tích được áp dụng cho các giả thiết quy luật phân bố vật liệu (P-FGM, E-FGM và S-FGM) để xác định các đặc tính hữu hiệu của tấm. Ảnh hưởng của các của mô hình hàm mật độ thể tích (Voigt, Reuss, Hashin Shtrikman, Tamura, LRVE và SCM), tỉ số cạnh trên chiều dày tấm và hệ số đặc trưng vật liệu để xác định chuyển vị lớn nhất, lực tới hạn và tần số dao động riêng của tấm dựa trên lời giải giải tích đã được phân tích.

Kết quả nghiên cứu cho thấy có sự khác biệt đáng kể khi sử dụng các mô hình hàm mật độ thể tích khác nhau. Ví dụ: tồn tại sự chênh lệch đến 50% khi phân tích thành phần chuyển vị theo mô hình Reuss so với mô hình Voigt, cận Hashin-Shtrikman cho kết quả phù hơn khi khoảng cách giữa các cận nhỏ. Hiệu ứng phương pháp tính toán các đặc tính đồng nhất hóa vật liệu FGM cho thấy cần được kể đến trong phân tích ứng xử tấm FGM.

CHƯƠNG 7

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

7.1 Kết luận

Thông qua những gì đã đạt được trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án rút ra một số kết luận:

- Hướng nghiên cứu có nhiều ý nghĩa và được quan tâm bởi rất nhiều nhà khoa học trên thế giới. Đặc biệt là hàm biến dạng cắt bậc cao mà luận án phát triển đã được trích dẫn trên nhiều bài báo đăng trên các tạp chí quốc tế uy tín.
- Các nội dung mà luận án đã tập trung nghiên cứu:
 - Các ứng xử của tấm FGM, tấm composite FGM và tấm composite nhiều lớp.
 - Các quy luật phân bố vật liệu (P-FGM, E-FGM và S-FGM) và các mô hình xác định các đặc trưng hữu hiệu (Voigt, Reuss, Hashin-Shtrikman, Mori-Tanaka, Tamura, LRVE và SCM) của tấm FGM.
 - Áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích bài toán tấm có kể đến: hệ số điều chỉnh cắt cải tiến, mặt trung hòa vật lý, phương pháp giảm bớt số ẩn số của bài toán, ảnh hưởng nền đàn hồi. Dùng lời giải giải tích, lời giải số, xét hiện tượng khóa cắt... để phân tích bài toán tĩnh, lực tới hạn và tần số dao động tự do của kết cấu tấm.
 - Áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết Quasi-3D để phân tích bài toán tấm, trong đó phát triển hàm biến dạng cắt bậc cao mới, sử dụng nguyên lý biến phân Hamilton, nguyên lý Lagrange để thiết lập phương trình năng lượng. Sử dụng lời giải Navier, lời giải Ritz cho tấm chịu tải trọng tĩnh và tải trọng do nhiệt độ... để phân tích bài toán tĩnh, lực tới hạn và tần số dao động riêng của kết cấu tấm.
 - Phát triển PP PTHH bằng cách sử dụng phần tử MITC3 và có kể đến thành phần độ cong được làm trơn trên miền, trên cạnh và trên nút phần tử, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao... để phân tích bài toán tĩnh và tần số dao động riêng cho kết cấu tấm.
 - Phát triển bài toán phi tuyến hình học bằng cách sử dụng PP PTHH sử dụng phần tử MITC3 có kể đến thành phần độ cong được làm trơn trên miền, trên cạnh phần tử, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao kết hợp giải thuật lặp Newton – Raphson... để phân tích bài toán tĩnh cho kết cấu tấm.
 - Phân tích hiệu ứng các phương pháp đồng nhất hóa các đặc tính vật liệu FGM đến các đáp ứng của tấm.
 - Các hiệu ứng về sự thay đổi tỉ số cạnh trên cạnh, tỉ số cạnh trên chiều dày tấm, hệ số đặc trưng vật liệu không đồng nhất, hệ số nền, cấu trúc phân lớp vật liệu... đều xuất hiện trong hầu hết các kết quả phân tích.
 - Các kết quả đạt được có độ chính xác cao, đáng tin cậy và có thể sử dụng để làm tài liệu cho các nghiên cứu sau này.

7.2 Kiến nghị

Trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án cũng gặp một số khó khăn và hạn chế nhất định. Vì vậy, một số vấn đề tồn tại trong luận án sẽ được phát triển trong thời gian sắp tới:

- Dùng lời giải Lévy để phân tích ứng xử cho kết cấu tấm FGM với điều kiện biên khác nhau.
- Phát triển PP PTHH C^1 cho lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.
- Phân tích thành phần lực tới hạn và dao động tự do cho bài toán tấm FGM sử dụng lý thuyết phi tuyến hình học với hàm biến dạng cắt bậc cao của luận án kết hợp các phương pháp làm tròn.
- Phát triển PP PTHH hiện tại cho mô hình tấm vi cấu trúc sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất.
- Phát triển phương pháp số cho mô hình rời rạc tính toán các đặc tính hữu hiệu tấm FGM.

CÁC KẾT QUẢ ĐÃ CÔNG BỐ

CHƯƠNG 2:

1. Van-Hau Nguyen, Trung-Kien Nguyen. Free vibration analysis of functionally graded plates based on physical neutral surface using first-order shear deformation theory. *Journal of Science and Technology*, 52 (2C), 92-102, 2014.
2. Nguyen Van Hau, Nguyen Trung Kien. Buckling analysis of functionally graded plates based on first-order shear deformation theory and physical neutral surface. *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ XI, TPHCM 7-9/11/2013*, 1, 446-454, 2013. ISBN: 978-604-913-212-2.
3. Nguyen Trung Kien, Nguyen Van Hau. A refined first-order shear deformation theory for analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundations. *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc*, 8/2015, Đà Nẵng. ISBN: 978-604-84-1272-2

CHƯƠNG 3:

4. Van-Hau Nguyen, Trung-Kien Nguyen, Huu-Tai Thai, Thuc P. Vo. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233-246, 2014 (SCI).
5. Nguyen Trung Kien, Vo Phuong Thuc, Thai Huu Tai, Nguyen Van Hau. A higher-order shear deformation theory for buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Proceeding of International Conference on Green Technology and Sustainable Development*, 30/10/2014 Ho Chi Minh City, 2, 222-229, 2014.
6. Nguyen Van Hau, Nguyen Trung Kien. A quasi-3D inverse trigonometric shear deformation theory for static analysis of functionally graded plates. *Hội nghị Cơ học vật rắn biến dạng toàn quốc*, 8/2015, Đà Nẵng. ISBN: 978-604-913-458-6
7. Nguyen Van Hau, Nguyễn Trung Kiên. A Ritz's method based solution for free vibration analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order shear deformation theory. *Hội nghị khoa học toàn quốc vật liệu composite*, 28-29/7/2016, Nha trang. ISBN: 978-604-82-2026-6.

CHƯƠNG 4:

8. Trung-Kien Nguyen, Van-Hau Nguyen, Thanh Chau-Dinh, Thuc P. Vo, Xuan-Hung Nguyen. Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Composites Part B: Engineering*, 107, 162-173, 2016 (SCI).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. T. K. Nguyen. Some methods for estimating effective elastic properties of heterogeneous plates. PhD thesis, University of Paris-Est, France (2008).
2. A. H. Akbarzadeh, A. Abedini, Z.T. Chen. Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates. *Composite Structures* 119 (2015) 598-609.
3. R. Hill. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceeding of the Physical Society* 65 (1952) 349-354.
4. L. Mishnaevsky Jr. *Computational mesomechanics of composites*. John Wiley & Sons, England (2007).
5. R. W. Zimmerman, Behavior of the Poisson ratio of a two-phase composite material in the high-concentration limit. *Applied Mechanics Reviews* 47 (1) (1994) 38-44.
6. Z. Hashin, S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962) 335-342.
7. J. Segurado, C. González, J. Llorca. A numerical investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites. *Acta Mater* 51 (2003) 2355–2369.
8. Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori–Tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6 (1987) 147-157.
9. H. Tan, Y. Huang, C. Liu, P.H. Geubelle. The Mori–Tanaka method for composite materials with nonlinear interface debonding. *International Journal of Plasticity* 21 (2005) 1890–1918.
10. J. H. Kim, G. H. Paulino. An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003) 1457-1497.
11. D. K. Jha, T. Kant, R. K. Singh. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures* 96 (2013) 833-849.
12. M. Gasik, K. Lilius, Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical model. *Computational Materials Science* 3 (1994) 41-49.
13. M. M. Gasik. Micromechanical modelling of functionally graded materials. *Computational Materials Science* 13 (1998) 42-55.
14. S. H. Chi, Y. L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 3657-3674.
15. F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983) 637-640.
16. J. L. Mantari, C. Guedes Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 94 (2012) 1991-2000.
17. S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells* (1959), McGraw-Hill, New York.
18. J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells*. CRC Press, 2nd Ed. USA (2004).
19. J. N Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates* (1999). Taylor Francis, Philadelphia.

20. J. N. Reddy, C.M. Wang. An overview of the relationships between solutions of classical and shear deformation plate theories. *Composites Science and Technology* 60 (2000) 2327-2335.
21. X. Q. He, T. Y. Ng, S. Sivashankera, K. M. Liew. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International journal of solids and structures* 38 (2001) 1641-1655.
22. S. H. Chi, Y. L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - Part I: Analysis. *International journal of solids and structures* 43 (2006) 3657–3674.
23. S. H. Chi, Y. L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - Part II: Numerical results. *International journal of solids and structures* 43 (2006) 3675–3691.
24. S. Srinivas, A. K. Rao. Bending, Vibration and Buckling of Simply-Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates. *International journal of solids and structures* 6 (11) (1970) 1463–1481.
25. G. N. Praveen, J. N. Reddy. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramicmetal plates. *Journal of Solids and Structures* 35 (1998) 4457–4476.
26. Y. Oatao, Y. Tanigawa. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *Journal of Thermal Stresses* 22 (1999) 35-55.
27. Q. Li, V. P. Iu và K. P. Kou. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 733-750.
28. R. C. Batra, J. Jin. Natural frequencies of a Functionally Graded Rectangular Plate. *Journal of Sound and Vibration* 204 (2004) 612-638.
29. T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 14 (8) (2007) 567-575.
30. T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures* 83 (2008) 25–36.
31. T. K. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composite Part B: Engineering* 55 (2013) 147-157.
32. T. K. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates with improved transverse shear stiffness based on the first-order shear deformation theory. *Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 228 (12) (2014) 2110-2131.
33. M. Singha, T. Prakash và M. Ganapathi. Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elements in Analysis and Design* 47 (4) (2011) 453 – 460.
34. L. S. Ma, D. W. Lee. A Further Discussion of Nonlinear Mechanical Behavior for FGM Beams under In-plane Thermal Loading. *Composite Structures* 93 (2011) 831-842.
35. D. G. Zhang, Y.-H. Zhou. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Computational Materials Science* 44 (2) (2008) 716 – 720.
36. D. G. Zhang. Modeling and analysis of FGM rectangular plates based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 68 (2013) 92 – 104.

37. M. K. Singha, T. Prakash and M. Ganapathi. Nonlinear Oscillation of FGM plates under Aerodynamic Load. *Proceedings of the World Congress on Engineering* 2 (2010) 958-966.
38. T. L. Wu, K. K. Shukla, J. H. Huang. Nonlinear static and dynamic analysis of functionally graded plates. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering* 11 (2006) 679-698.
39. M. Latifi, F. Farhatnia, M. Kadkhodaei. Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion. *European Journal of Mechanics A/Solids* 41 (2013) 16-27.
40. G. Srinivas, U. S. Prasad. Simulation of Traditional Composites Under Mechanical Loads. *International Journal of Systems , Algorithms & Applications* 2 (2012) 2277-2677.
41. A. Naderi, A.R. Saidi. On pre-buckling configuration of functionally graded Mindlin rectangular plates. *Mechanics Research Communications* 37 (2010) 535–538.
42. T. Prakash, M. K. Singha, M. Ganapathi. Thermal snapping of functionally graded materials plates. *Materials and Design* 30 (2009) 4532–4536.
43. Y. H. Lee, S. I. Bae, J. H. Kim. Thermal buckling behavior of functionally graded plates based on neutral surface. *Composite Structures* 137 (2016) 208–214.
44. J. N Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984) 745-752.
45. J. N. Reddy. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000) 663–684.
46. J. N. Reddy. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures* (2011), 1, 1-21.
47. A. M. Zenkour, D. S. Mashat. Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates. *Natural Science* 2 (2010) 968-978.
48. A. M. Zenkour, M. Sobhy. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures* 93 (2010) 93–102.
49. A. M. Zenkour, M. Sobhy. Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting On Elastic Foundations Using the Trigonometric Theory. *Journal of Thermal Stresses* 34 (2011) 1119-1138.
50. B. A. S. Shariat, M.R. Eslami. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures* 78 (2007) 433–439.
51. Y. H. Dong, Y.H. Li. A unified nonlinear analytical solution of bending, buckling and vibration for the temperature-dependent FG rectangular plates subjected to thermal load. *Composite Structures* 159 (2017) 689–70.
52. Loc V. Tran, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 73 (2013) 65–76.
53. G. Shi. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 4399–4417.
54. C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, R. M. N. Jorge. A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration* 300 (2007) 1048–1070.
55. Y. M. Ghugal, A. S. Sayyad. A Static Flexure of Thick Isotropic Plates Using Trigonometric Shear Deformation Theory. *Journal of Solid Mechanics* 2 (1) (2010) 79-90.

56. I. Mechab, H. A. Atmane, A. Tounsi, H. A. Belhadj, El Abbas Adda Bedia. A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. *Acta Mechanica Sinica* 26 (2010) 941–949.
57. J. S. Kumar, B. S. Reddy, C. E. Reddy, K. V. K. Reddy. Geometrically non linear analysis of functionally graded material plates using higher order theory. *International Journal of Engineering, Science and Technology* 3 (2011) 279-288.
58. K. P. Soldatos. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica* 94 (1992)195–220.
59. F. Z. Kettaf, M.S.A. Houari, M. Benguediab and A. Tounsi. Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model. *Steel and Composite Structures*, Vol. 15, No. 4 (2013) 399-423.
60. S. S. Akavci. Thermal buckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation according to a hyperbolic shear deformation theory. *Mechanics of Composite Materials* 50 (2) 279-298.
61. M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science* 29 (8) (1991) 745-752.
62. H. T. Thai, T. P. Vo. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 3269–3281.
63. M. Karama. Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Acta Mechanica* 40 (2003) 1525–1546.
64. J. L. Mantari, A. S. Oktem, G. C. Soares. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 94 (2012) 714–723.
65. J. L. Mantari, A. S. Oktem, G. C. Soares. Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher order shear deformation theory. *Composites: Part B* 43 (8) (2012) 3348-3360.
66. S. Xiang, G. W Kang. A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *European Journal of Mechanics A/Solids* 37 (2013) 336–343.
67. C. H. Thai, A. Ferreira, S. P. A. Bordas, H. Nguyen-Xuan. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids* 43 (2014) 89–108.
68. N. Grover, D.K. Maiti, B.N. Singh. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures* 95 (2013) 667–675.
69. M. S. A. Hoauri. A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates. *International Journal of Computational Methods* 11 (2014) 135-182.
70. E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, M. Soares. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites: Part B* 42 (2011) 123–133.
71. A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 94 (2012) 1814–1825.
72. A. M. A Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N.

- Jorge, C. M. M. Soares. Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *European Journal of Mechanics – A/Solids* 37 (2013) 24–34.
73. H. T. Thai, S. E. Kim. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Composite Structures* 99 (2013) 172–180.
 74. H. T. Thai, T. P. Vo, T. Bui, T. K. Nguyen. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mechanica*, 225 (3) (2014) 951-964.
 75. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, F. Inam, J. Lee. Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory. *Composites Part B: Engineering* 68 (2014) 59-74.
 76. J. L. Mantari, C. G. Soares. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Composites: Part B* 45 (2013) 268–281.
 77. J. L. Mantari, C. G. Soares. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Composite Structures* 94 (2012) 2561–2575.
 78. A. H. Baferani, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh. An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 225 (2011) 526-536.
 79. H. T. Thai, S. E. Kim. Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Composite Structures* 93 (2011) 1738-1746.
 80. H. T. Thai, S. E. Kim. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *International Journal of Mechanical Sciences* 54 (2012) 269-276.
 81. H. T. Thai, S. E. Kim. Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 3870–3882.
 82. S. Guenfoud, S.V. Bosakov, D.F. Laefer. A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space. *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010) 1822–1829.
 83. R. Ansari, S. Sahmani, H. Rouhi. Rayleigh–Ritz axial buckling analysis of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions. *Physics Letters A* 375 (2011) 1255–1263.
 84. L. Dozio. Refined 2-D theories for free vibration analysis of annular plates: Unified Ritz formulation and numerical assessment. *Computers and Structures* 147 (2015) 250–258.
 85. E. A. Shahrabaki, A. Alibeigloo. Three-dimensional free vibration of carbon nanotube-reinforced composite plates with various boundary conditions using Ritz method. *Composite Structures* 111 (2014) 362–370.
 86. A. M. Zenkour, M. Sobhy. Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium. *Physica E* 56 (2013) 251-259.
 87. M. Sobhy. Thermomechanical bending and free vibration of single-layered graphene sheets embedded in an elastic medium, *Physica E* 56 (2014) 400-409.
 88. M. Sobhy. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures* 99 (2013) 76-87.

89. T. K. Nguyen, T. T. P. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites: Part B* 76 (2015) 273-285.
90. T. K. Nguyen, N. D. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams. *Composite Structures* 160 (2016) 142–151.
91. H. T. Thai, T. K. Nguyen, T. P. Vo, J. Lee. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids* 45 (2014) 211–225.
92. G. R. Bhashyam, R. H. Gallagher. An approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate bending analysis. *Computers & Structures* 19 (1984) 35-40.
93. A. Tessler and T. J. R Hughes. A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 50 (1985) 71–101.
94. J. H. Kim, Y. H. Kim. A three-node C^0 ANS element for geometrically nonlinear structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002) 4035–4059.
95. U. Andelfinger and E. Ramm. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993) 1311–1337.
96. C. Polat. An assessment of a co-rotational EAS brick element. *Latin American Journal of Solids and Structures* 7 (2010) 77 – 89.
97. K. U. Bletzinger, M. Bischoff and E. Ramm. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures* 75 (2000) 321–334.
98. Y. Chai, W. Li, G. Liu, Z. Gong, T. Li. A superconvergent alpha finite element method (S α FEM) for static and free vibration analysis of shell structures. *Computers and Structures* 179 (2017) 27-47.
99. K. J. Bathe, F. Brezzi. A simplified analysis of two plate bending elements – the MITC4 and MITC9 elements. *International Proceedings of numerical methods in engineering: theory and applications*. University College Swansea, Wales (1987).
100. P. S. Lee and K. J. Bathe. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures* 82 (2004) 945–962.
101. Y. Lee, P. S. Lee, K. J. Bathe. The MITC3+ shell element and its performance. *Computers & Structures* 138 (2014) 12–23.
102. H. M. Jeon, P. S. Lee, K. J. Bathe. The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers. *Computers and Structures* 134 (2014) 128–142.
103. H. M. Jeon, Y. Lee, P. S. Lee, K. J. Bathe. The MITC3+ shell element in geometric nonlinear analysis. *Computers and Structures* 146 (2015) 91–104.
104. K. J. Bathe, P. S. Lee, J. K. Hiller. Towards improving the MITC9 shell element. *Computers & Structures* 81 (2003) 477–89.
105. K. J. Bathe, P. S. Lee. The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending. *Advances in Engineering Software* 41 (2010) 712–728.
106. G. R. Liu, Nguyen-Thoi T. *Smoothed Finite Element Methods*. CRC Press (2010).
107. Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, K. Y. Dai, K. Y. Lam. Selective smoothed finite element method. *Tsinghua Science & Technology* 12 (5) (2007) 497–508.
108. G. R. Liu, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, K. Y. Dai, K. Y. Lam. On the essence

- and the evaluation of the shape functions for the smoothed finite element method (sfem), (letter to editor). *International Journal for numerical methods in engineering* 77 (2009) 1863–1869.
109. G. R. Liu, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: properties, accuracy and convergence rates. *International Journal for numerical methods in engineering* 84 (2010) 1222–1256.
 110. Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, K. Y. Dai, K. Y. Lam. Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM). *International Journal for numerical methods in engineering* 71 (2007) 902–930.
 111. Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin–Reissner plates. *International Journal Numerical Methods Biomedical Engineering* 25 (2009) 882–906.
 112. X. Y. Cui, G. R. Li, G. Y. Li, X. Zhao, Nguyen-Thoi T, G. Y. Sun. A smoothed finite element method (SFEM) for linear and geometrically nonlinear analysis of plates and shells. *Computer Modeling in Engineering & Sciences* 28 (2008) 109–125.
 113. A. J. M. Ferreira, R. C. Batra, C. M. C. Roque, L. F. Qian, G. M. N. Jorge. Natural frequencies of functionally graded plates by a mesh-less method. *Composite Structures* 75 (2006) 593–600.
 114. D. F. Gilhooley, R. C. Batra, J. R. Xiao, M. A. McCarthy, J. W. Gillespie. Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Composite Structures* 80 (2007) 539–552.
 115. X. L. Chen, Z. Y. Zhao, K. M. Liew. Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage. *Advances in Engineering Software* 39 (2) (2008) 121–131.
 116. Y. Y. Lee, X. Zhao, K. M. Liew. Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Smart Materials and Structures* 18 (2009):035007. doi:10.1088/0964-1726/18/3/035007.
 117. X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration* 319 (2009) 918–939.
 118. X. Zhao, K. M. Liew. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (33-36) (2009) 2796–2811.
 119. K. M. Liew, X. Zhao, A. J. M. Ferreira. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures* 93 (8) (2011) 2031–2041.
 120. Loc V. Tran, Chien H. Thai, , H. Nguyen-Xuan, An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 73 (2013) 65–76.
 121. T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194 (39–41) (2005) 4135–4195.
 122. Loc V. Tran, A.J.M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory, *Composites Part B* 51 (2013) 368–383.
 123. S. Amir Farzam-Rad, Behrooz Hassani, Abbas Karamodin, Isogeometric analysis

- of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface, *Composites Part B* 10.1016/j.compositesb.2016.09.029 (2017).
124. Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Computers & Structures*, 141 (2014) 94-112.
 125. M ED Thai CH, Zenkour AM, Abdel-Wahab M, Nguyen-Xuan H. A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Composite* 2016;139:77–95.
 126. M. Sobhy. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures* 99 (2013), 76 – 87.
 127. H. T. Thai, S. E. Kim. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 96 (2013) 165–173.
 128. M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh. A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 224 (2010) 1831–1841.
 129. A. M. Zenkour. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005) 5243–5258.
 130. N. E. Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E. A. Adda.Bedia. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences* 53 (4) (2011) 237 – 247.
 131. A. Neves, A. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, R. Jorge, C. Soares. Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 92 (2012) 749–766.
 132. S. H. Hashemi, H. R. D. Taher, H. Akhavan, and M. Omid. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 1276–1291.
 133. S. Natarajan, G. Manickam. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design* 57 (2012) 32 – 42.
 134. A. Bessaim, M. S. Houari, A. Tounsi, S. Mahmoud, E. A. Adda Bedia. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 15 (2013) 671–703.
 135. Q. Li, V. P. Iu, K. P. Kou. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration* 311 (2008) 498–515.
 136. A. M. Zenkour. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Archive of Applied Mechanics* 77 (2007) 197-214.
 137. M. Sobhy. An accurate shear deformation theory for vibration and buckling of FGM sandwich plates in hygrothermal environment. *Composite Structures* 110 (2016) 62-77.

138. A. Mahi, E. A. Bedia, A. Tounsi. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling* 39 (2015) 2489–2508.
139. M. S. Houari, A. Tounsi, O. Anwar Bég. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 76 (2013) 102–111.
140. E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* (1) (2008) 194 – 203.
141. C. P. Wu, K. H. Chiu. RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. *Composite Structures* 93 (5) (2011) 1433 – 1448.
142. A. M. Zenkour. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling* 30 (2006) 67–84.
143. J. L. Mantari, C. M. M. Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 94 (2012) 1991-2000.
144. J. L. Mantari, C. M. M. Soares. Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates. *Composite Structures* 109 (2014) 231-239.
145. A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering* 44 (2013) 657–674.
146. S. Brischetto. Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 4 (2009) 13–33.
147. A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, C. M. C. Roque, M. Cinefra, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering* 43 (2012) 711–725.
148. A. M. Zenkour. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four unknown shear and normal deformations theory. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 15 (2013) 629–656.
149. H. T. Thai, D. H. Choi. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 1008–1022.
150. Nguyen-Xuan H, Tran-Vinh L, Nguyen-Thoi T, Vu-Do HC. Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. *Composite Structures* 93 (11) (2011) 3019–3039.
151. F. A. Fazzolari, E. Carrera. Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions. *Journal of Thermal Stresses* 37 (2014) 1449–1481.
152. X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 90 (2009) 161–171.
153. B. Uymaz, M. Aydogdu. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26 (18) (2007) 1847–1863.
154. G. Jin, Z. Su, S. Shi, T. Ye, S. Gao. Three-dimensional exact solution for the free

- vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures* 108 (2014) 565–577.
155. A. H. Baferani, A. H. Saidi, H. Ehteshami. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures* 93(7) (2011) 1842–1853.
 156. S. S. Vel, R. C. Batra. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 272 (2004) 703–730.
 157. L. F. Qian, R. C. Batra, L. M. Chen. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plate by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method. *Composites: Part B* 35 (2004) 685–697.
 158. Chau-Dinh T, G. Zi, P. S. Lee, T. Rabczuk, J. H. Song. Phantom-node method for shell models with arbitrary cracks. *Composite Structures* 9293 (2012) 242-256.
 159. Y. Lee, K. Yoon, P. S. Lee. Improving the MITC3 shell finite element by using the hellinger-Reissner principle. *Composite Structures* 110111 (2012) 93-106.
 160. J. Kim, K. J. Bathe. The finite element method enriched by interpolation covers. *Composite Structures* 116 (2013) 35–49.
 161. E. N. Dvorkin, K. J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1 (1984) 77–88.
 162. K. J. Bathe, E. N. Dvorkin. A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22 (1986) 697–722.
 163. M. L. Bucelem, K. J. Bathe. Higher-order mitc general shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (21) (1993) 3729-3754.
 164. G. Liu, Nguyen-Thoi T. *Smoothed finite element methods*. Taylor & Francis; 2010. <https://books.google.ca/books?id¼49TdHtwAACAAJ>.
 165. G. R. Liu, K. Y. Dai, Nguyen-Thoi T. A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics* 39 (6) (2007) 859–877.
 166. C. Shankara, N. Iyengar. A C^0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration* 191(5) (1996) 721-738.
 167. P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, Q. Lieu-Xuan. Cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) based on the C^0 type higher-order shear deformation for geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates. *Computational Materials Science* 96 (2015) 549–558.
 168. P. S. Lee and K. J. Bathe. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers and Structures* 82 (2004) 945–962.
 169. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H, Le-Van C. Free and forced vibration analysis using the n-sided polygonal cell-based smoothed finite element method (nCS-FEM). *International Journal for numerical methods in engineering* 10 (1) (2013) 1340008.
 170. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Thai-Hoang C. A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates. *International Journal for numerical methods in engineering* 91 (7) (2012) 705–741.
 171. Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Ngo-Thanh P. Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using

- triangular elements. *Computers & Structures* 125 (2013) 100–113.
172. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Thai-Hoang C, Nguyen-Xuan H. A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) using triangular elements for static and free vibration analyses of shell structures. *International Journal of Mechanical Sciences* 74 (2013) 32–45.
 173. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Loc Tran V, Nguyen-Xuan H. A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) based on the C^0 -type higher-order shear deformation theory for static and free vibration analyses of functionally graded plates. *Computational Materials Science* 79 (2013) 857–872.
 174. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Le-Dinh T, Nguyen-Xuan H. Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3). *Smart Materials and Structures* 22 (2013) 095026.
 175. Nguyen-Thoi T, P. Phung-Van, H. Luong-Van, H. Nguyen-Van, H. Nguyen-Xuan. A cell based smoothed three node Mindlin plate element (CS-MIN3) for static and free vibration analyses of plates. *Computational Mechanics* 51 (2013) 65–81.
 176. Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, Nguyen-Xuan H. An n-sided polygonal edge-based smoothed finite element method (nES-FEM) for solid mechanics. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 27 (9) (2011) 1446–1472.
 177. Nguyen-Xuan H, Liu GR, Thai-Hoang C, Nguyen-Thoi T. An edge-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2009) 471–489.
 178. Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Hoang S, Nguyen-Xuan H. An edge-based smoothed three-node Mindlin plate element (ES-MIN3) for static and free vibration analyses of plates. *The KSCE Journal of Civil Engineering* 2013 (in press).
 179. Phan-Dao H, Nguyen-Xuan H, Thai-Hoang C, Nguyen-Thoi T, Rabczuk T. An edge-based smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates. *International Journal of Computational Methods* 10 (1) (2013) 1340005.
 180. Nguyen-Xuan H, G. R. Liu, S. P. A. Bordas, S. Natarajan, T. Rabczuk. An adaptive singular ES-FEM for mechanics problems with singular field of arbitrary order. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 253 (2013) 252–273.
 181. Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, Vu-Do HC, Nguyen-Xuan H. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for visco-elastoplastic analyses of 2D solids using triangular mesh. *Computational Mechanics* 45 (2009) 23–44.
 182. Thanh Tran Ngoc, G. R. Liu, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. An edge-based smoothed finite element method for primal-dual shakedown analysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 82 (7) (2010) 917–938.
 183. Canh Le V, Nguyen-Xuan H, H. Askes, T. Rabczuk, Nguyen-Thoi T. Computation of limit load using edge-based smoothed finite element method and secondorder cone programming. *International Journal of Computational Methods* 10 (1) (2013) 1340004.
 184. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H, Le-Van C. An application of the ES-FEM in solid domain for dynamic analysis of 2D fluid-solid interaction problems. *International Journal of Computational Methods* 10 (1) (2013) 1340003.
 185. G. R. Liu, Nguyen-Thoi T, K. Y. Lam. An edge-based smoothed finite element

- method (ES-FEM) for static and dynamic problems of solid mechanics. *Journal of Sound and Vibration* 320 (2008) 1100–1130.
186. Nguyen-Thoi T, Liu GR, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Tran C. Adaptive analysis using the node-based smoothed finite element method (NS-FEM). *Communications in Numerical Methods in Engineering* 27 (1) (2011) 198–218.
 187. Nguyen-Thoi T, Liu GR, Nguyen-Xuan H. Additional properties of the nodebased smoothed finite element method (NS-FEM) for solid mechanics problems. *International Journal of Computational Methods* 6 (4) (2009) 633–666.
 188. G. R. Liu, L. Chen, Nguyen-Thoi T, K. Zeng, G. Y. Zhang. A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (11) (2010) 1466–1497.
 189. Nguyen-Thoi T, Vu-Do HC, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010) 3005–3027.
 190. Nguyen-Xuan H, T. Rabczuk, Nguyen-Thoi T, Tran TN, Nguyen-Thanh N. Computation of limit and shakedown loads using a node-based smoothed finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90 (3) (2012) 287–310.
 191. G. R. Liu, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, K. Y. Lam. A node-based smoothed finite element method (ns-fem) for upper bound solutions to solid mechanics problems. *Composite Structures* 87 (12) (2009) 14–26.
 192. Nguyen-Xuan H, T. Rabczuk, S. Bordas, J. Debongnie. A smoothed finite element method for plate analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (1316) (2008) 1184–1203.
 193. R. L. Taylor, F. Auricchio. Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements: Part IIa simple triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (18) (1993) 3057–3066.
 194. C. P. Wu, K. H. Chiu, Y. M. Wang. RMVT-based meshless collocation and elementfree galerkin methods for the quasi-3d analysis of multilayered composite and {FGM} plates. *Composite Structures* 93 (2) (2011) 923–943.
 195. T. K. Nguyen, H. T. Thai, T. P. Vo. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures, An International Journal* 18(1) (2015) 91–120.
 196. J. N. Reddy. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.
 197. M. A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Essentials (1)*, John Wiley & Sons, New York (1991).
 198. V. R. Kar, S. K. Panda. Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel. *Chinese Journal of Aeronautics* 29(1) (2016) 173–183.
 199. J. Yang, H. S. Shen. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites: Part B* 34 (2003) 103–115.
 200. H. Nguyen-Van. Development and application of assumed stain smoothing finite element technique for composite plate/shell. PhD thesis, University of Southern

- Queensland (2000).
201. H. Nguyen-Van, N. Nguyen-Hoai, T. Chau-Dinh, T. Nguyen-Thoi. Geometrically nonlinear analysis of composite plates and shells via a quadrilateral element with good coarse-mesh accuracy. *Composite Structures* 112 (2014) 327–338.
 202. Y. X. Zhang, K. S. Kim. Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements. *Composite Structures* 72 (2006) 301–310.
 203. N. S. Putcha, J. N. Reddy. A refined mixed shear flexible finite element for nonlinear analysis of laminated plates, *Composite Structures* 22 (1986) 529–38.
 204. T. Kant, J. R. Kommineni. C^0 finite element geometrically non-linear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory. *Composite Structures* 45 (1992) 511–520.
 205. R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965) 213-222.
 206. T. Reiter, G. J. Dvorak. Micromechanical models for graded composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997) 1281-1302.
 207. S. S. Vel, R. C. Batra. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* 40 (2002) 1421-1433.
 208. S. Suresh, A. Mortensen. *Fundamentals of functionally graded materials: Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*. Press, Cambridge (1998).
 209. J. Aboudi, M. J. Pindera, S. M. Arnold. Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering* 30 (1999) 777-832.
 210. J. R. Cho, D. Y. Ha. Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials. *Material Science Engineering A302* (2001) 187-196.
 211. T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. Green's operator for a periodic medium with traction-free boundary conditions and computation of the effective properties of thin plates. *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 6518-6534.
 212. T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. Hashin-Shtrikman variational principle for heterogeneous plates. *European Journal of Mechanics – A/Solids* 28 (2009) 1051-1063.
 213. A. M. Zenkour. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1 Deflection and stresses. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005) 5224–5242.